



# **Le Vol de la Fusée, Stabilité et Trajectographie**

**Version 2.0 - juillet 2008**

# Sommaire

• <a href="#">Introduction</a>		
• <a href="#">Chapitre 1 - Généralités sur le vol de la fusée.</a>		5
• <a href="#">1.1. Les phases de vol.</a>		
• <a href="#">1.2. Les forces en présence.</a>		
• <a href="#">1.3. Evolution des paramètres au cours du vol.</a>		
• <a href="#">Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.</a>		9
• <a href="#">2.1. Objectif et définition de la Stabilité.</a>		
• <a href="#">2.2. Les forces qui font tourner nos fusées.</a>		
• <a href="#">2.3. Comportements en vol.</a>		
• <a href="#">2.4. Critères de Stabilité.</a>		
• <a href="#">2.5. Analogie avec une Girouette.</a>		
• <a href="#">2.6. Test de la ficelle.</a>		
• <a href="#">Chapitre 3 - Calcul de la Portance.</a>	 	18
• <a href="#">3.1. Méthodes élémentaires.</a>		
• <a href="#">3.2. Méthode de Barrowman.</a>		
• <a href="#">3.3. Barrowman amélioré.</a>		
• <a href="#">3.4. Autres méthodes.</a>		
• <a href="#">Chapitre 4 - Stabilité dynamique.</a>	 	27
• <a href="#">4.1. Oscillations non-amorties.</a>		
• <a href="#">4.2. Amortissement des oscillations.</a>		
• <a href="#">4.3. Exemple de calcul de stabilité dynamique.</a>		
• <a href="#">4.4. Simulation de stabilité dynamique.</a>		
• <a href="#">Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.</a>	 	35
• <a href="#">5.0. Principe du calcul pas à pas.</a>		
• <a href="#">5.1. Cas du vol vertical 1D - Z</a>		
• <a href="#">5.2. Cas du vol oblique 2D - X Z</a>		
• <a href="#">5.3. Cas du vol oblique 3D - X Y Z</a>		
• <a href="#">5.4. Descente sous parachute, avec vent.</a>		
• <a href="#">Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.</a>	  	45
• <a href="#">6.1. Notions et terminologie.</a>		
• <a href="#">6.2. Différentes méthodes.</a>		
• <a href="#">Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.</a>	  	50
• <a href="#">7.1. Simulateur dynamique 3DDL dans un plan - X Z <math>\theta</math></a>		
• <a href="#">7.2. Simulateur dynamique 6DDL - X Y Z <math>\theta</math> <math>\psi</math> <math>\varphi</math></a>		
• <a href="#">7.3. Incidence en sortie de rampe.</a>		
• <a href="#">Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.</a>	 	56
• <a href="#">8.1. Principe de la méthode.</a>		
• <a href="#">8.2. Formules de calcul.</a>		
• <a href="#">8.3. Démonstration.</a>		
• <a href="#">8.4. Abaques de performances.</a>		
• <a href="#">Annexes.</a>		
• <a href="#">Forces Aérodynamiques.</a>		62
• <a href="#">Masse Centrage Inertie.</a>		71
• <a href="#">Evolution des critères de stabilité.</a>		76
• <a href="#">Glossaire.</a>		85
• <a href="#">Recherches Bibliographiques.</a>		91

# Préliminaires.

## Références.

Ce dossier regroupe les informations présentes dans des anciens documents ANSTJ - Planète-Sciences :

- "*Le vol de la fusée*", édition Octobre 1999, de *Gil Denis*, basé sur des notes plus anciennes et sur les remarques de Marc Zirnheld, Arnaud Colmon et Gilles Soubrier,
- "*Stabilité dynamique & éléments pour logiciels de Trajectographie*", Version 1 (Août 2000), de Xavier Millon (*Milou*) du GRETSS,
- "*Données Numériques sur le Vol des Fusées*", cahier CNES - ANSTJ, années 1980
- "*ABC de la microfusée*", cahier CNES - Planète-Sciences, octobre 2007
- "*321 espace - modélisme CLAP - spécial micro fusées*", cahier CNES - ANSTJ, années 1980
- "*L'argonaute (Hors-Série)*" - Chapitre 6 : "Le Vol de la Fusée" (extraits du Vol de la Fusée de Gil Denis)
- "*MICRO-COSME N°5 Mai 97 - La revue du p'tit monde de la micro-fusée*", Article de Alain Arnaudet intitulé "Dis bonjour aux micros..."
- Traduction de "*TIR-33: Calculating the Center of Pressure of a Model Rocket*", James Barrowman, Centuri, 1970

Les gravures et dessins qui ornent les débuts de chapitres proviennent de publications des années 1968 à 1980, notamment 321info et Model Rocketry. Le 1er schéma du 1er chapitre est dérivé d'un schéma du club Venturi.

Ce dossier a été compilé par Léo Côme entre novembre 2006 et décembre 2007, à la suite de discussions entre plusieurs bénévoles passionnés (citons Laurent Regnault et Laurent Costy notamment).

Merci à Bernard Bertin, Laurent Regnault, Christophe Sicluna, Félicien Roux, Julien Boldrini et Nicolas Chaleroix pour leur relecture et leurs corrections.

Les auteurs remercient également l'attraction terrestre et la résistance de l'air.

## Corrections.

Toute correction, remarque ou suggestion doit être adressée par e-mail à [espace@planete-sciences.org](mailto:espace@planete-sciences.org), avec comme objet "Dossier technique : Le Vol de la Fusée, Stabilité & Trajectographie". Nous comptons sur vous pour améliorer ce dossier technique.

## Version et téléchargement.

Ceci constitue la version 2.0 datée du 30 août 2008 de ce dossier technique.

Voici les changements par rapport à la version précédente :

- nombreuses corrections linguistiques et précisions de sens (merci Bernard Bertin, de Go Mars)
- corrections de Christophe Sicluna et Nicolas Chaleroix, Laurent Regnault et Félicien Roux
- modifications des §2.4. §3.3. §3.4. et annexe aéro §Coefficient de portance
- conversion au format OpenOffice puis exportation en fichier pdf
- recréation manuelle de tous les liens

Retrouvez ce dossier technique sur [www.planete-sciences.org/espace/basedoc/](http://www.planete-sciences.org/espace/basedoc/).

## Licence.

Vous êtes a priori autorisés à copier, à modifier et à rediffuser dans un but non lucratif tout ou partie du présent dossier technique à la double condition de (1) citer convenablement le présent dossier technique comme source, et de (2) nous indiquer par e-mail à [espace@planete-sciences.org](mailto:espace@planete-sciences.org) l'endroit où vous avez copié et éventuellement modifié ce dossier technique.

# Introduction

Ce dossier rassemble les éléments concernant le vol de la fusée. Rédigé à partir de nombreux documents plus spécialisés, il vise à présenter les principales méthodes utilisées pour répondre aux questions suivantes :

- Comment obtenir une “belle” trajectoire ?  
(*préoccupation d'ordre esthétique et sécuritaire*)
- Peut-on estimer l'altitude atteinte par une fusée et savoir où elle va retomber ?  
(*s'arracher à la terre, syndrome d'Icare*) (*retrouver sa fusée ou éviter de la prendre sur la figure !*)

Ces questions illustrent deux volets complémentaires de la physique du vol de la fusée :

- sa **stabilité** (oscillations de la fusée),
- sa **trajectoire** (déplacement dans l'espace, performances).

La difficulté de compréhension de ces phénomènes est due à plusieurs causes :

La réalité est bien plus complexe que les modèles utilisés dans les cours de physique élémentaire (mouvement de translation uniformément accéléré). Les phénomènes auxquels nous sommes confrontés sont essentiellement dynamiques (variation de la masse de la fusée et de la poussée du moteur). Malgré le faible nombre de forces en présence, certains paramètres sont difficiles à prendre en compte dans les équations ; en particulier tout ce qui touche à la résistance de l'air donne naissance à un certain nombre de coefficients “fourre-tout”. Et que dire de l'influence du vent ?

Quoiqu'il en soit, les pages suivantes fournissent un certain nombre d'éléments permettant une meilleure compréhension.

Les éléments théoriques nécessaires restent simples pour les 5 premiers chapitres, et il est toujours possible de se limiter à leur aspect qualitatif.

Lorsque certaines équations sont énoncées, elles correspondent généralement à un niveau de première ou terminale.

Les chapitres 6 et 7 sont destinés à un public averti, et font appel à des notions post-bac (opérations vectorielles). Ils sont repérés par 3 diplômes 🎓🎓🎓 .

Enfin, précisons que *Planète Sciences* met à la disposition un logiciel de calcul de stabilité et de trajectoire de fusées, *Trajec*, utilisant certaines méthodes présentées dans ce document.

Cet outil est notamment utilisé pour effectuer les contrôles durant les campagnes de lancement.

Il est gratuitement téléchargeable sur [www.planete-sciences.org/espace/basedoc/](http://www.planete-sciences.org/espace/basedoc/).

# Chapitre 1 - Généralités sur le vol de la fusée.

## 1.1. Les phases de vol.

Le vol d'une fusée se décompose en plusieurs phases :

- La phase propulsée.
- La phase balistique.
- La descente sous parachute.

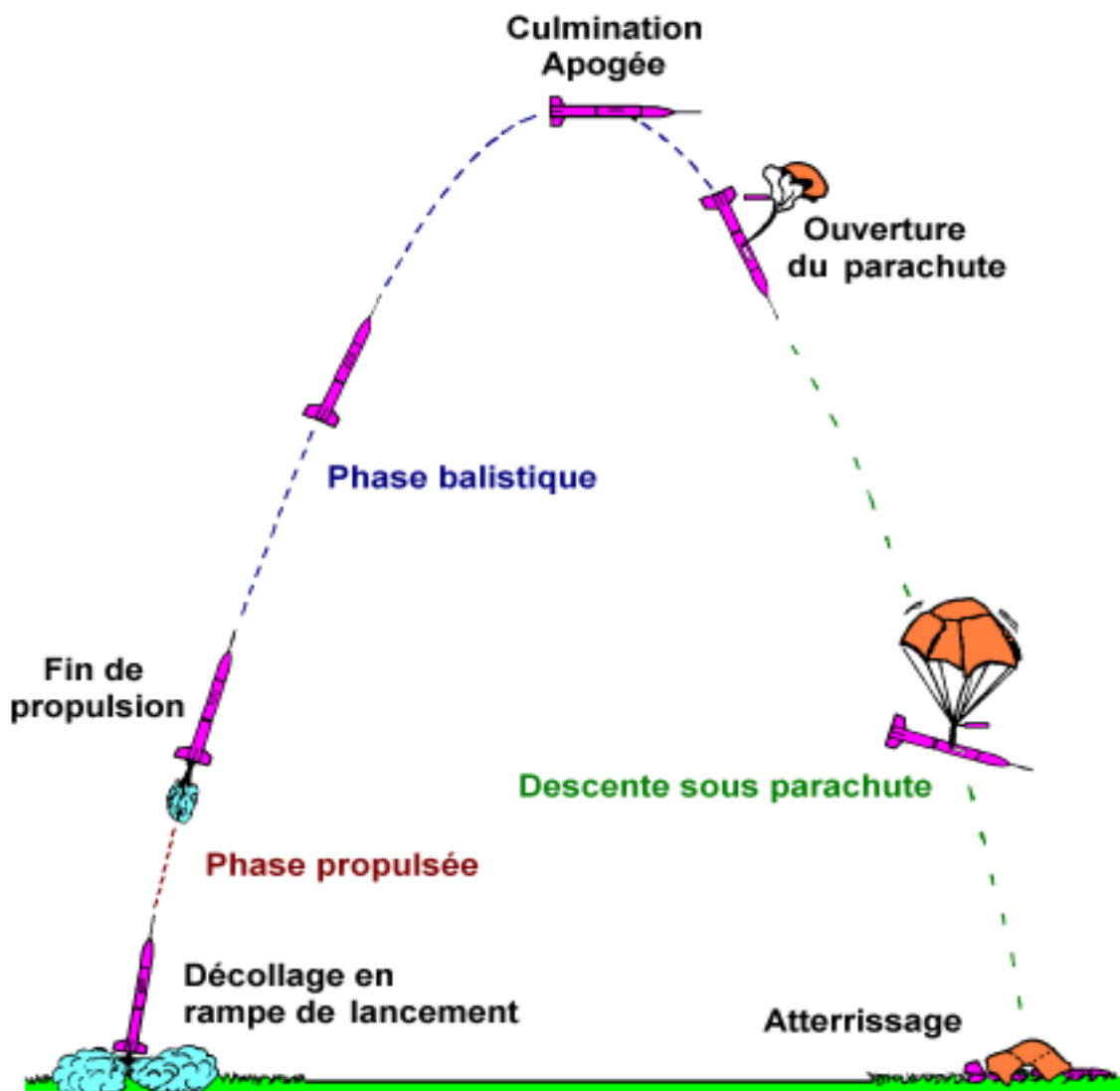
Ces phases s'articulent autour d'évènements majeurs :

La période s'écoulant de l'instant de la mise à feu à la fin de combustion du propulseur, et qui s'appelle la **phase propulsée**. Elle comprend une partie où la fusée est guidée par la rampe de lancement et une partie où la fusée est livrée à elle-même.

Après l'extinction du propulseur commence la **phase balistique** pendant laquelle la fusée, uniquement soumise à son poids et à la résistance de l'air, exploite la vitesse acquise pendant la propulsion pour atteindre son altitude maximale.

Après la culmination, lorsque l'engin commence à retomber, la phase balistique se poursuit jusqu'à l'ouverture du **parachute**.

Bien sûr, on peut rencontrer des phases balistiques avortées lorsque le parachute s'ouvre avant la culmination, ou des vols balistiques complets sans ouverture de parachute (mais c'est moins souhaitable !).



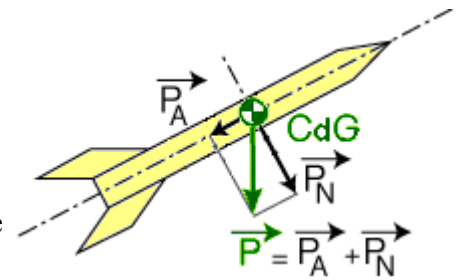
## 1.2. Les forces en présence.

Au cours de son vol, la fusée est soumise à trois forces :

- le **pooids** de la fusée,
- la **poussée** du moteur,
- la **résistance de l'air**.

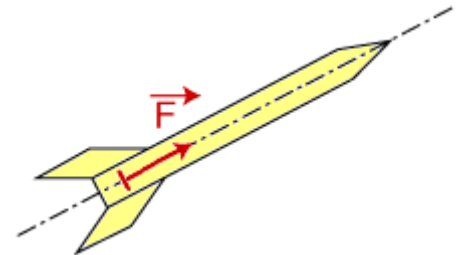
### Le poids de la fusée

Le **pooids**  $\vec{P}$  s'exerce au Centre de Gravité (**CdG** ⊕) de la fusée et est dirigé verticalement vers le bas. Si la fusée n'est pas verticale, on procède à la décomposition sur les axes de la fusée :  $\vec{P} = \vec{P}_A + \vec{P}_N$



### La poussée du moteur

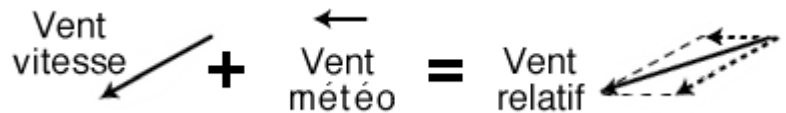
La **poussée**  $\vec{F}$  s'applique au niveau du moteur, suivant l'axe longitudinal, vers l'ogive. En supposant que le propulseur est correctement positionné, la poussée s'applique au milieu de la plaque de poussée.



### La résistance de l'air

La **résistance de l'air**  $\vec{R}$  s'oppose à l'avancement de la fusée dans l'air.

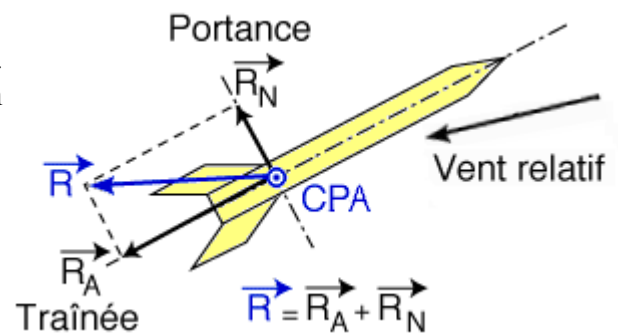
Elle dépend donc du **vent relatif**, somme du vent créé par la vitesse de la fusée (**vent vitesse**) et du **vent météo**. Le vent relatif, ou "vent apparent", est le vent ressenti par la fusée.



Elle s'applique en un point appelé Centre de Poussée Aérodynamique (**CPA** ⊙) généralement situé près des ailerons. Cette force dépend de la géométrie de la fusée (taille et position des ailerons, ...). En général, la résistance de l'air comprend deux composantes :  $\vec{R} = \vec{R}_A + \vec{R}_N$

avec  $R_A$  : composante axiale nommée **Traînée**,

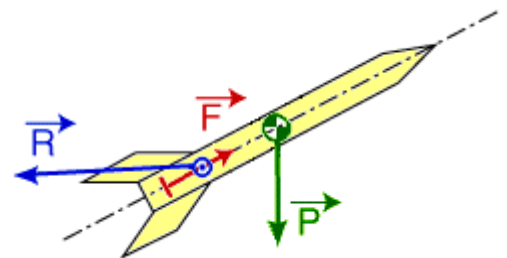
$R_N$  : composante normale nommée **Portance**.



### Bilan

La fusée est soumise, au cours de son vol, à trois forces :

- son **pooids**  $\vec{P}$ , force verticale appliquée au Centre de Gravité (**CdG** ⊕),
- la **poussée**  $\vec{F}$  du moteur, force axiale appliquée sur la plaque de poussée,
- la **résistance de l'air**  $\vec{R}$ , force appliquée au Centre de Poussée Aérodynamique (**CPA** ⊙).



### Dynamique du vol

L'évolution de ces trois forces va régir le comportement de la fusée :

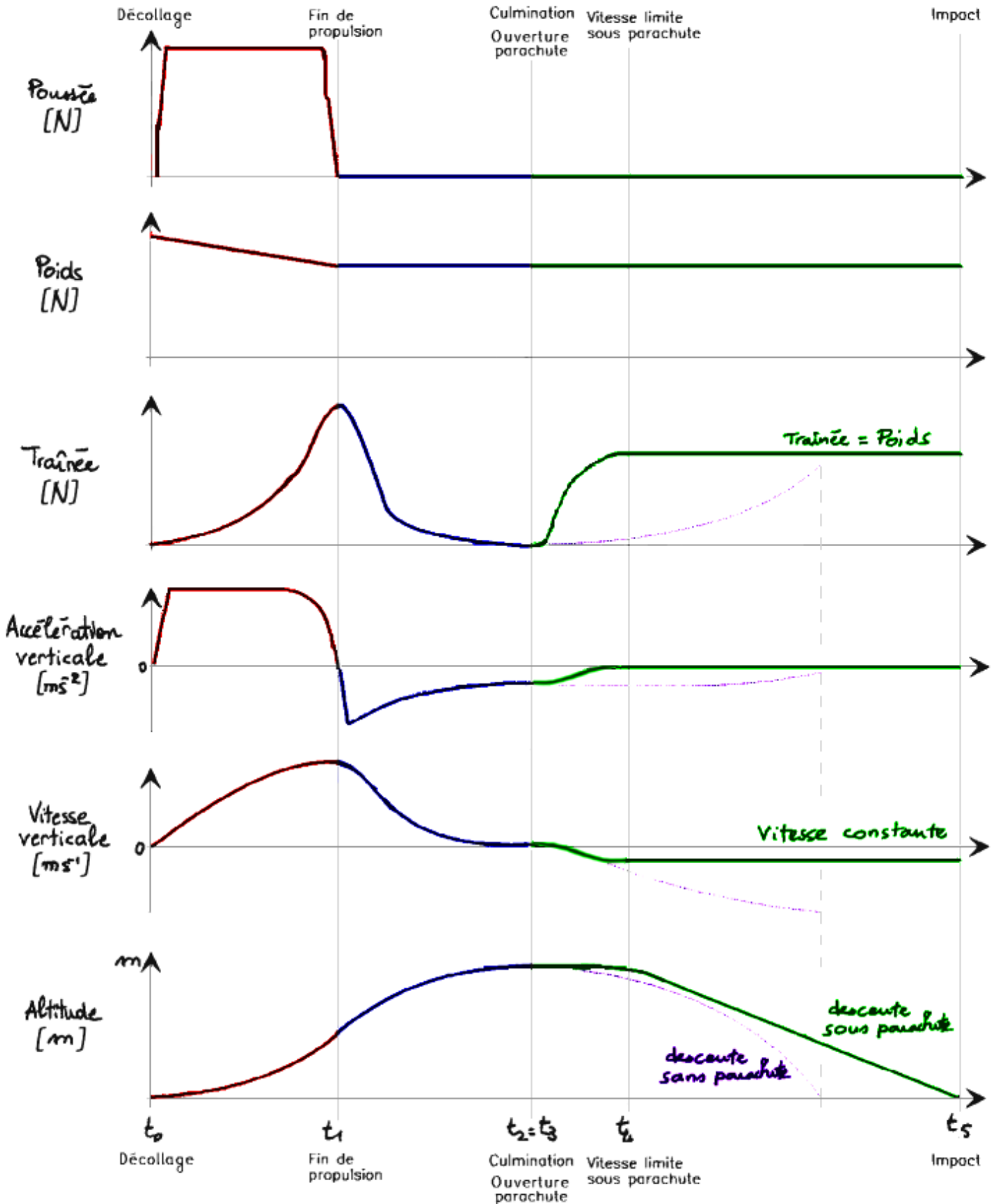
- le mouvement de la fusée autour de son Centre de Masse va définir sa **stabilité**.
- le mouvement du Centre de Masse de la fusée dans l'espace va définir sa **trajectoire**,

*Note : le Centre de Masse, ou Centre d'inertie est presque identique au Centre de Gravité (définitions »).*

### 1.3. Évolution des paramètres au cours du vol.

Nous venons de définir les différentes forces s'appliquant sur une fusée.

Voici une première approche de l'évolution de leur valeur au cours d'un vol vertical, et de la trajectoire obtenue.



Note : l'échelle de temps n'est pas linéaire : la phase propulsée dure de 0,5 à 3s, la culmination est atteinte en 5 à 20s et la descente sous parachute peut durer plusieurs minutes.

L'allure des courbes traduit l'influence des différentes forces :

Durant la **phase propulsée**, l'accélération reste pratiquement constante jusqu'à ce que la vitesse rende la résistance de l'air plus influente, l'accélération décroît alors. La vitesse augmente alors plus lentement jusqu'à atteindre une vitesse maximale à la fin de propulsion.

La traînée suit une courbe directement liée au carré de la vitesse.

La phase propulsée est également marquée par une diminution du poids due à la combustion du moteur (éjection de masse).

La **phase balistique** commence par une forte décélération au moment de la fin de combustion. La fusée n'est plus alors soumise qu'à son poids et à la résistance de l'air qui freinent sa progression. La vitesse décroît et la courbe d'altitude commence à s'infléchir. La culmination intervient lorsque la vitesse verticale devient nulle. L'altitude est alors maximale.

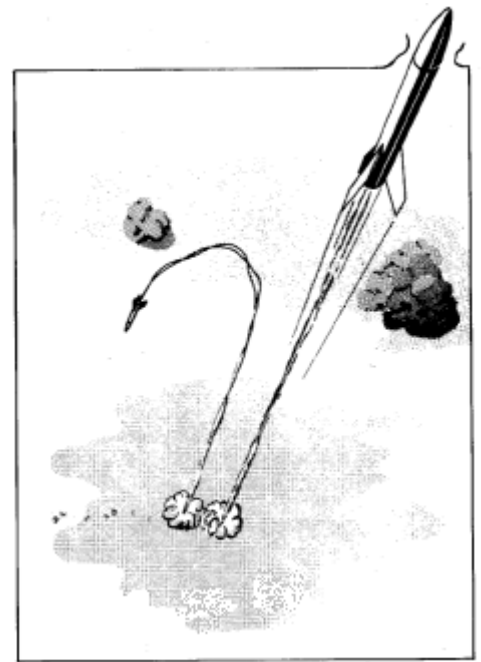
A l'ouverture du **parachute**, la première partie de la descente se traduit par une augmentation de la vitesse sous l'effet de l'attraction terrestre. Cette vitesse crée une traînée qui va progressivement équilibrer le poids. La fusée est alors soumise à deux forces égales et opposées. L'accélération est nulle et la vitesse constante. C'est la Vitesse Limite, ou vitesse de chute stabilisée. L'altitude décroît alors linéairement en fonction du temps.

Si le parachute ne s'ouvre pas, la fusée descend sous l'effet de son poids et la traînée n'est pas suffisante pour atteindre une vitesse limite. La vitesse augmente, tout comme le stress des spectateurs.



# Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.

- [Chapitre 1 - Généralités sur le vol de la fusée.](#)
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#)
  - [2.1. Objectif et définition de la Stabilité.](#)
  - [2.2. Les forces qui font tourner nos fusées.](#)
  - [2.3. Comportements en vol.](#)
  - [2.4. Critères de Stabilité.](#)
  - [2.5. Analogie avec une Girouette.](#)
  - [2.6. Test de la ficelle.](#)
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#)
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#)
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#)
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#)
- [Annexes.](#)



## 2.1. Objectif et définition de la Stabilité.

Rappelons que la question initiale en matière de stabilité est :

"Comment obtenir une "belle" trajectoire de sa fusée (sans pirouettes ni oscillations) ?"

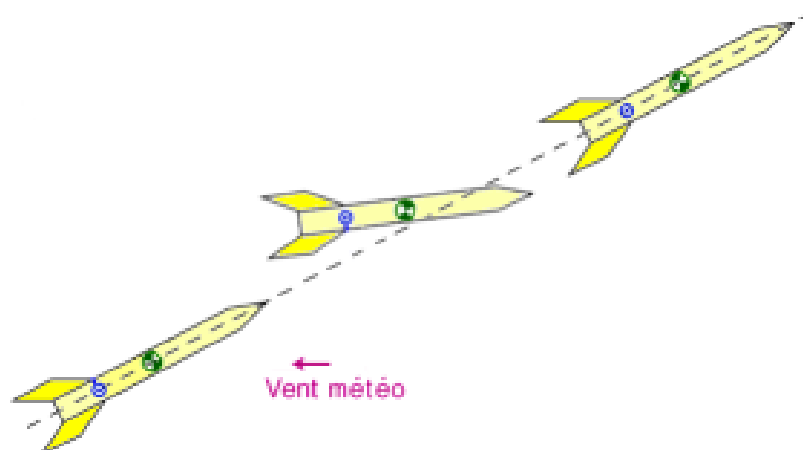
Pour être stable, la fusée doit conserver la même attitude durant son vol en maintenant son axe longitudinal aligné le mieux possible avec la direction de sa vitesse.

Autrement dit : **Une fusée est stable si elle retrouve naturellement sa position initiale lorsque, pour une raison quelconque, elle se met en incidence (déf. »).**

Pour savoir comment construire une fusée stable, il faut réfléchir à la physique du vol des fusées : vitesse, forces ...

Ce document fournit un certain nombre d'éléments permettant une meilleure compréhension de cette physique du vol.

Au final, il ressort quelques règles relativement simples qui assurent d'avoir un vol stable, même en cas de perturbations telle que les rafales de vent.



## 2.2. Les forces qui font tourner nos fusées.

On a vu au chapitre 1 que la fusée est soumise, au cours de son vol, à trois forces :

- son poids, force verticale appliquée au Centre de Gravité (**CdG** ⊕),
- la poussée, force axiale appliquée sur la plaque de poussée,
- la résistance de l'air, force appliquée au Centre de Poussée Aérodynamique (**CPA** ⊙).

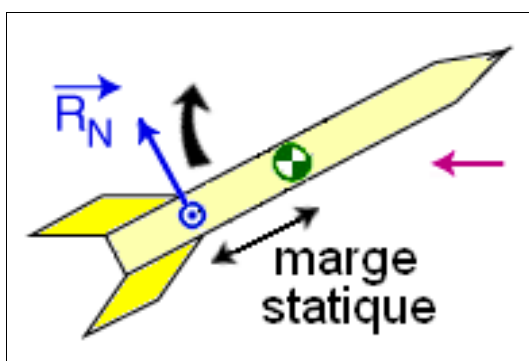
Les forces qui sont capables de faire tourner la fusée sur elle-même sont celles qui créent un {Moment} par rapport au Centre de Masse.

Le Poids, la Poussée moteur et la Traînée sont toujours alignés avec le Centre de Masse (**CdM**), et ne contribuent pas à la rotation de la fusée sur elle-même.

Ainsi, la fusée tourne autour de son Centre de Masse sous la seule action de la composante normale de la résistance de l'air (**R<sub>N</sub>**), nommée **Force de Portance**.

La distance entre le **CPA** et le **CdM** est appelée **Marge Statique** (MS) ; elle représente le "bras de levier" de cette force de Portance.

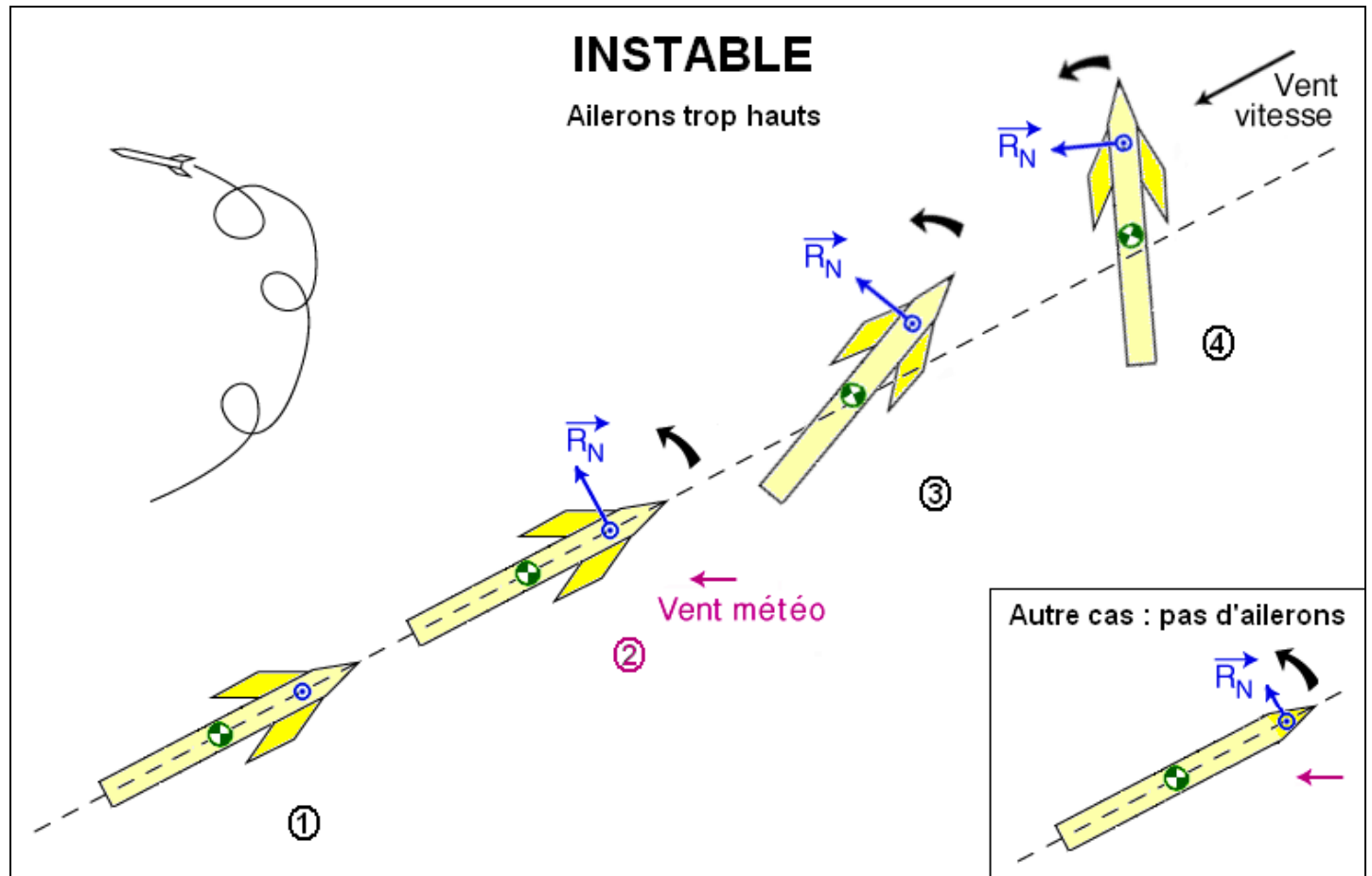
La rotation de la fusée dépend donc uniquement de la valeur du **Moment de Portance** (Force de Portance × Marge Statique).



## 2.3. Comportements en vol.

Suivant la nature du **Moment de Portance**, différents comportements en vol sont distingués. On prend ici comme exemple une rafale de vent (**vent météo**) à un moment du vol (**étape 2**).

### Instable



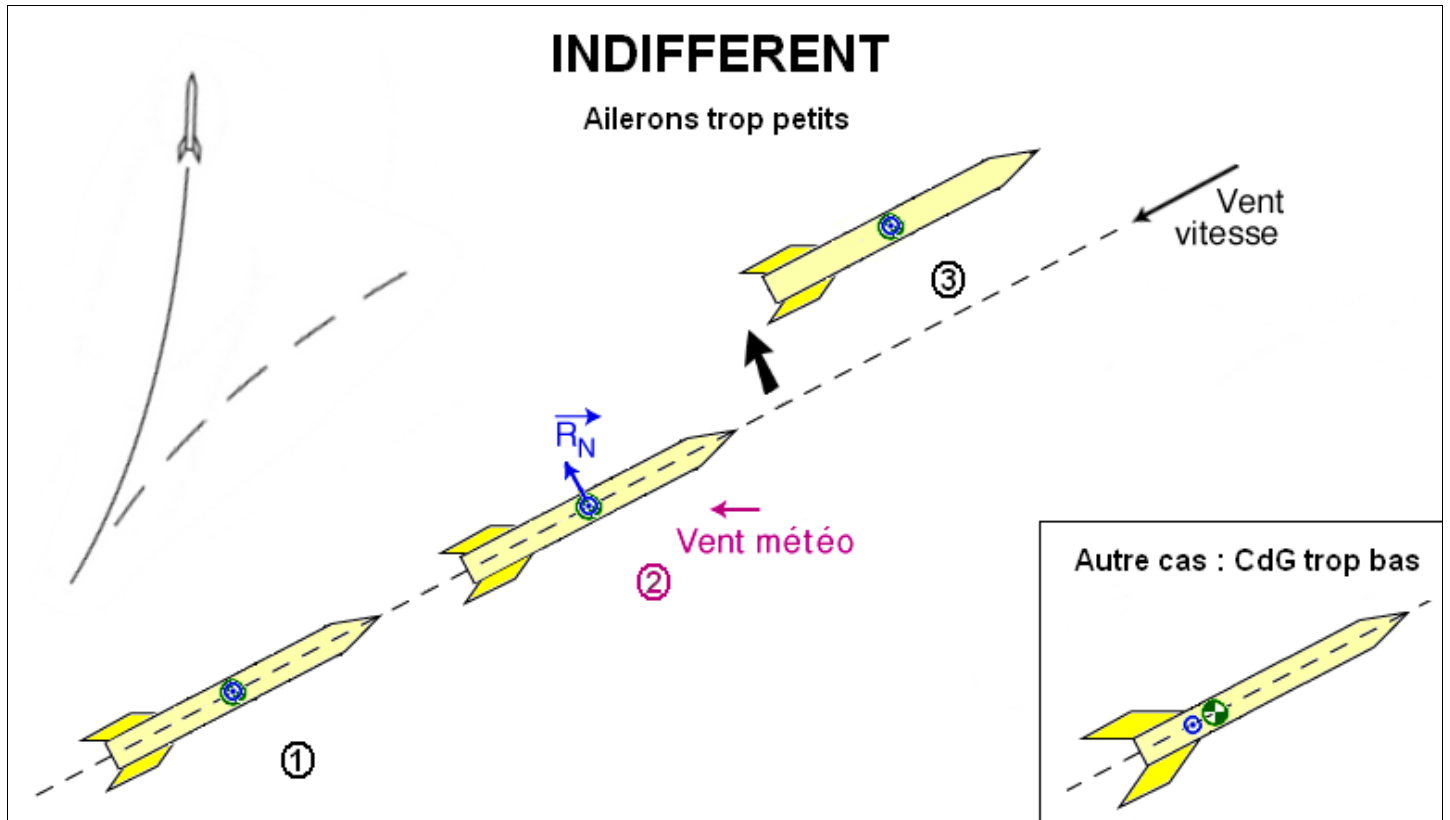
Prenons une fusée dont les ailerons (donc le Centre de Poussée Aérodynamique) sont placés en avant du Centre de Gravité (Marge Statique négative).

Dans ce cas, le couple de portance va écarter la fusée de sa trajectoire initiale, de plus en plus.

La fusée effectuera donc une série de tête-à-queue (*loopings*), avant de retomber disgracieusement au sol.

Cette situation d'**instabilité** est **dangereuse**.

## Indifférent



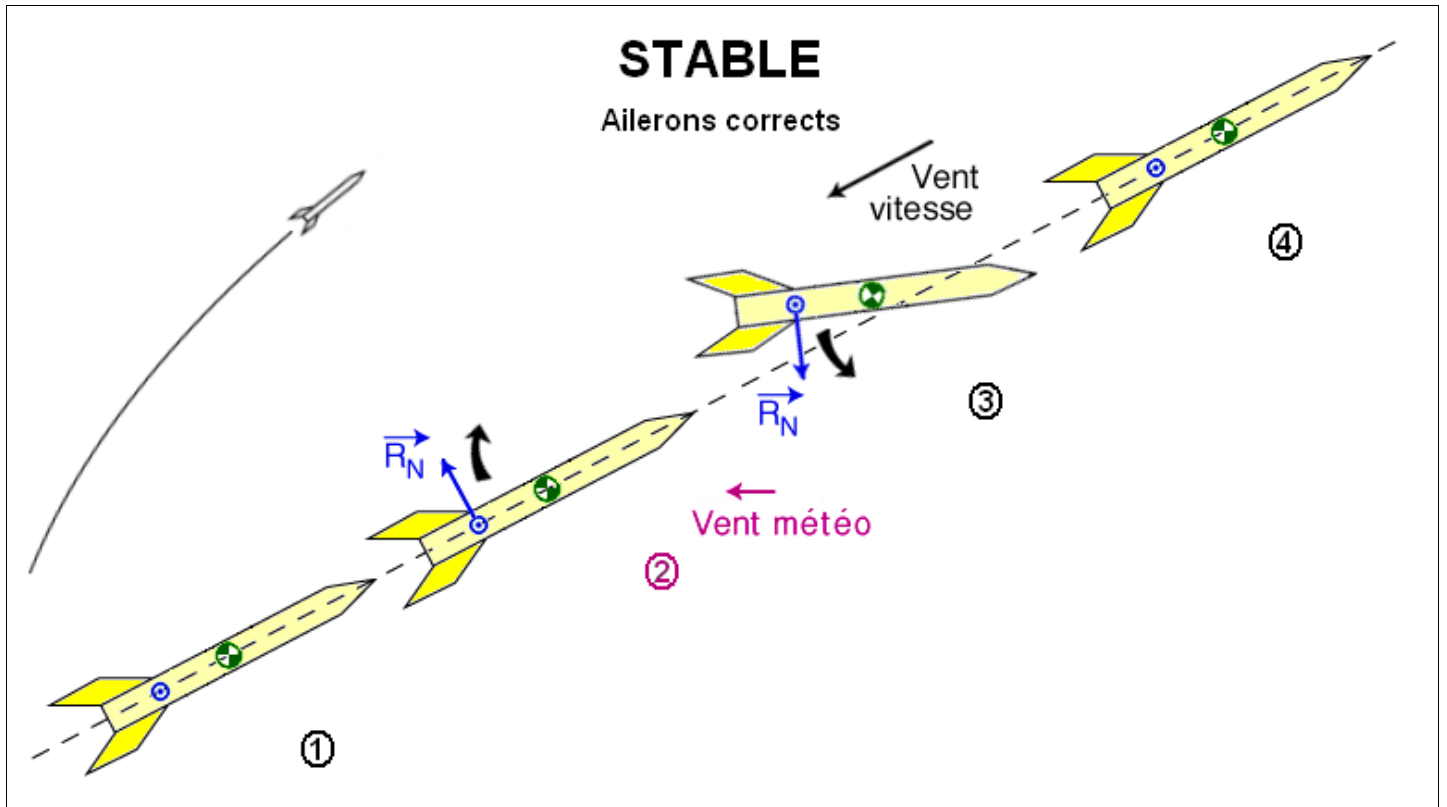
Si les ailerons sont petits (faible Portance), ou si le CPA est proche du CdM (faible Marge Statique), le Moment de Portance sera trop faible.

La fusée va errer dans une position quelconque, sans suivre précisément la trajectoire voulue.

L'**indifférence** constitue une situation intermédiaire entre stabilité et instabilité, qui donne aux fusées un **comportement imprévisible**.

Dans beaucoup d'outils logiciels, cette situation est considérée comme de l'instabilité.

## Stable



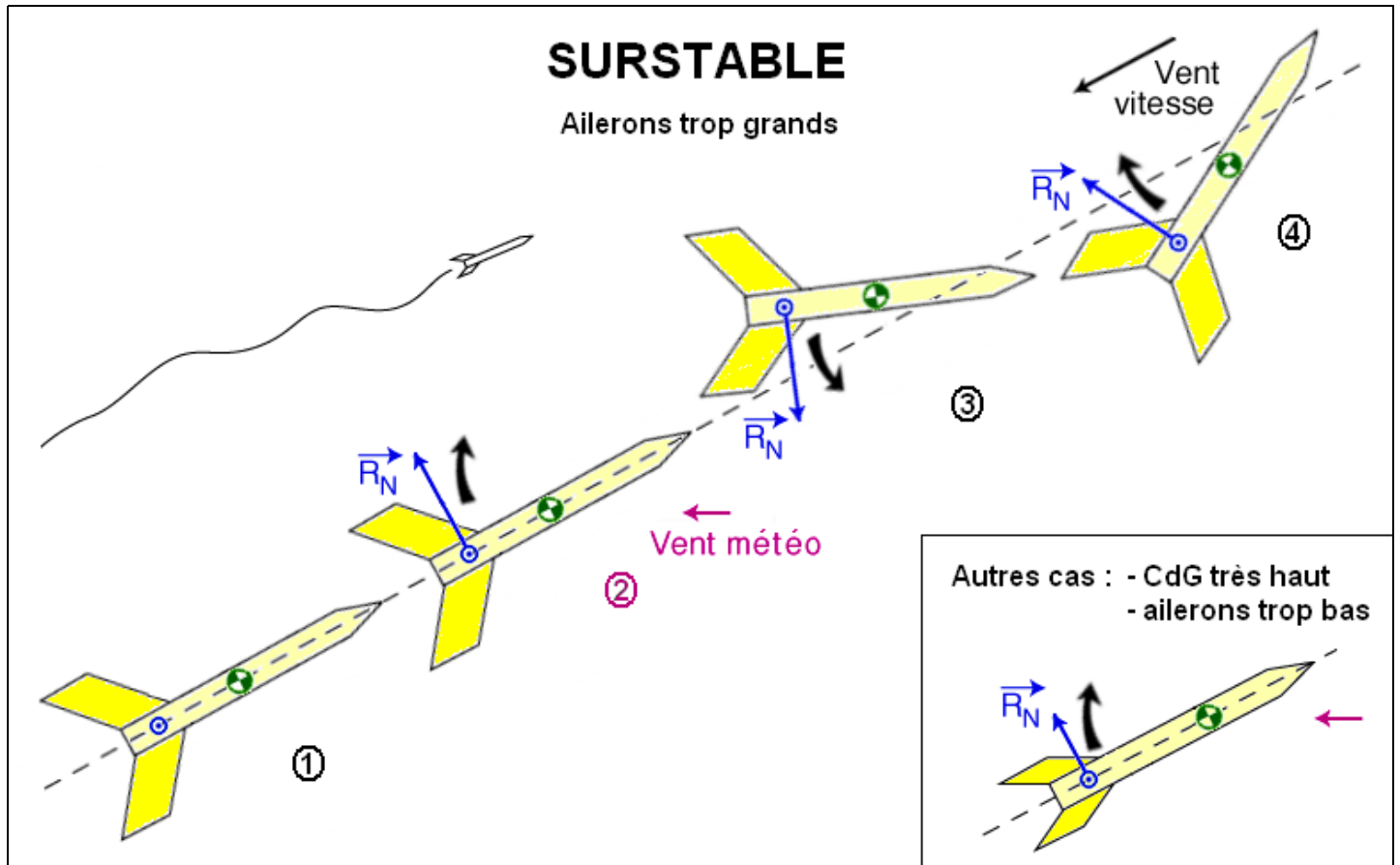
Prenons une fusée normale, avec des ailerons de taille moyenne situés en bas de la fusée.

Le Moment de Portance entraîne la fusée qui revient vers sa position initiale. Une fois la fusée dans cette position, la force de portance s'annule.

En fait, la force de rappel de la portance a tendance à entraîner la fusée en incidence de l'autre côté du vent relatif, et c'est seulement après plusieurs oscillations de plus en plus faibles, amorties, que la fusée retrouve sa position initiale.

Cette situation de **stabilité** est recherchée pour garantir un vol maîtrisé (le plus **sécuritaire**).

## Surstable



Si la Portante ou la Marge Statique sont fortes, le Moment de Portance aura une grande influence et entrainera la fusée de l'autre côté du vent relatif.

En pratique, la fusée oscillera continuellement sans jamais trouver de position d'équilibre. Cette attitude nommée **surstabilité** est généralement **dangereuse**.

Cette situation peut devenir critique, notamment si la résistance des matériaux n'est pas suffisante pour supporter ces contraintes : fixation des ailerons, pièces de liaison, ...

Un autre inconvénient de cette surstabilité est l'extrême sensibilité de la fusée au vent météo.

La fusée surstable se couchera presque immédiatement dans le vent vrai, et partira donc quasiment à l'horizontale, ce qui n'est pas le but recherché.

Ce phénomène, appelé "Girouettage" (ou "*weathercocking*" en anglais), est principalement observable en sortie de rampe car la vitesse de la fusée est encore faible.



## 2.4. Critères de Stabilité.

Il est possible, de manière expérimentale, de définir des conditions moyennes de stabilité. Ces conditions permettent d'obtenir une trajectoire sans à-coups et insensible au vent météo.

### Vocabulaire

La **Marge Statique** est la distance du Centre de Masse (**CdM** ⊕) au Centre de Poussée Aérodynamique (**CPA** ⊙), exprimée en Calibres (diamètre du corps de la fusée).

Le Centre de Poussée Aérodynamique (CPA) doit se situer en arrière du Centre de Masse (CdM).

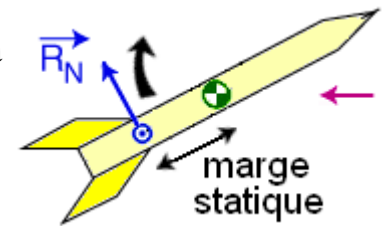
Pour mesurer ou calculer la position du Centre de Masse (CdM), voir en annexe sur le [Centrage](#).

Pour calculer la position du Centre de Portance Aérodynamique (CPA), voir le [chapitre suivant](#).

Le **Gradient de Portance**  $Cn\alpha$  représente l'efficacité des ailerons. Voir son calcul dans le [chapitre suivant](#) et sa définition en annexe [Aéro](#).

Le produit  $MS.Cn\alpha$  est à mettre en relation avec le Moment de Portance.

La **Finesse** est le rapport entre la longueur  $L$  de la fusée et son diamètre  $D$ . Cela représente l'élancement de la fusée.

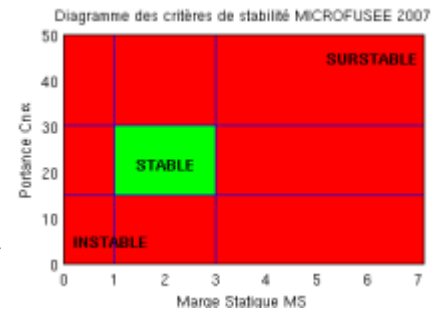


### Pour une MicroFusée

L'agrément MicroFusée conseille les limites suivantes :

- **Marge Statique MS** comprise entre 1 et 3 calibres.
- **Gradient de Portance**  $Cn\alpha$  compris entre 15 et 30 (ailerons ni excessivement petits, ni excessivement grands).
- **Finesse**  $L/D$  comprise entre 10 et 30.

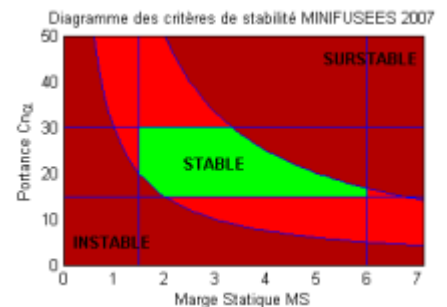
Néanmoins, la MicroFusée est un domaine d'expérimentation de la stabilité. Dans un but pédagogique, il est possible de lancer des MicroFusées en dehors de ces limites.



### Pour une MiniFusée

Le Cahier des Charges des MiniFusées impose les limites suivantes :

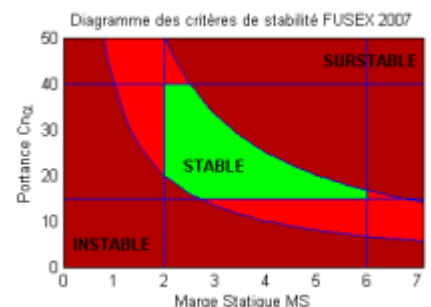
- **Marge Statique MS** comprise entre 1,5 et 6 calibres.
- **Gradient de Portance**  $Cn\alpha$  compris entre 15 et 30.
- **Produit**  $MS.Cn\alpha$  compris entre 30 et 100.
- **Finesse**  $L/D$  comprise entre 10 et 20.
- **Vitesse en sortie de rampe** supérieure à 18 m/s.



### Pour une Fusée Expérimentale

Le Cahier des Charges des Fusées Expérimentales impose les limites suivantes :

- **Marge Statique MS** comprise entre 2 et 6 calibres.
- **Gradient de Portance**  $Cn\alpha$  compris entre 15 et 40.
- **Produit**  $MS.Cn\alpha$  compris entre 40 et 100.
- **Finesse**  $L/D$  comprise entre 10 et 35.
- **Vitesse en sortie de rampe** supérieure à 20 m/s.



## Remarques diverses

Ces valeurs ne sont nullement limitatives car une fusée pourra très bien voler en dehors de ces limites (notamment sans vent). Elles donnent simplement un ordre de grandeur de ce qui est couramment utilisé pour obtenir de bons résultats.

Il faut bien reconnaître que cet écart de 1,5 à 6 de la Marge Statique permet de pallier un certain nombre d'approximation dans les calculs et d'erreur dans la réalisation de nos fusées. Les vraies fusées qui ont leur stabilité assurée par des ailerons fixes volent avec des marges statiques beaucoup plus faibles.

Bien noter que la fourchette de la Marge Statique de 1,5 à 6 est le fruit d'un acquis empirique et que, si l'on construit un mobile entièrement original, cette fourchette peut se révéler inadéquate en particulier parce qu'elle se base sur une mesure du diamètre de l'engin, lequel est censé donner l'échelle à la fois des caractéristiques de portance du fuselage et des caractéristiques d'inertie de la fusée. En réalité, ce diamètre peut tout à fait être déconnecté de ces deux caractéristiques, ou même n'être plus défini.

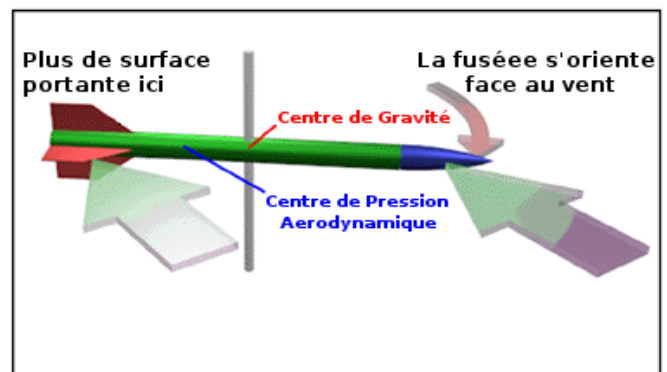
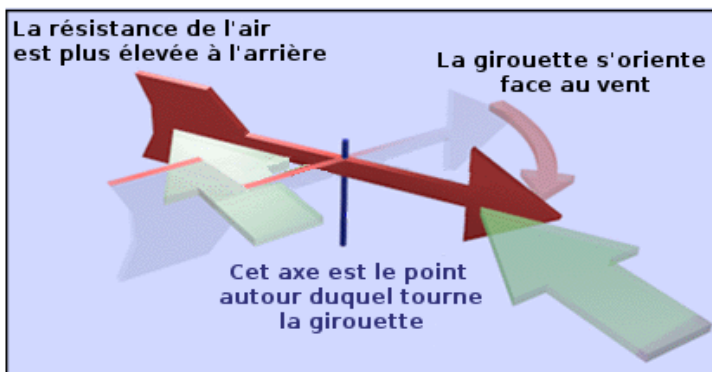
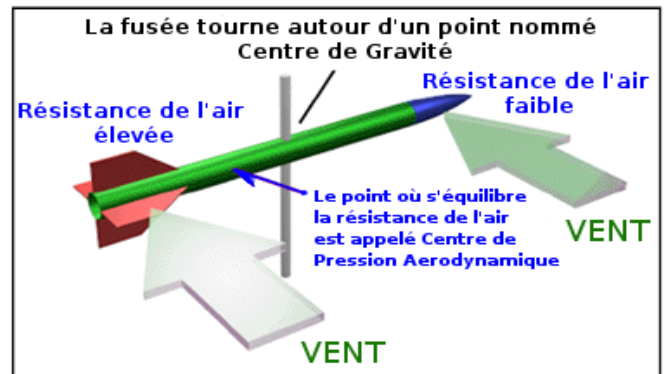
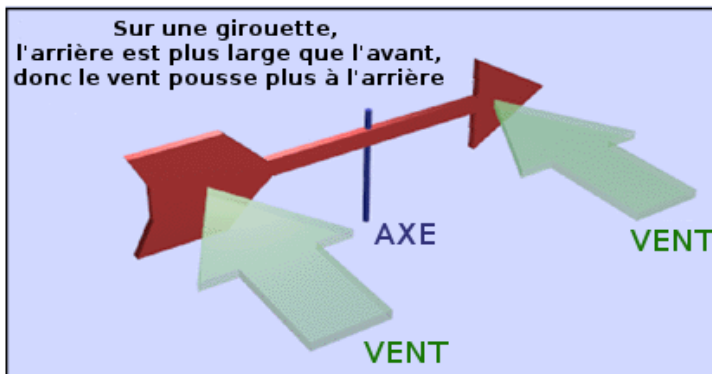
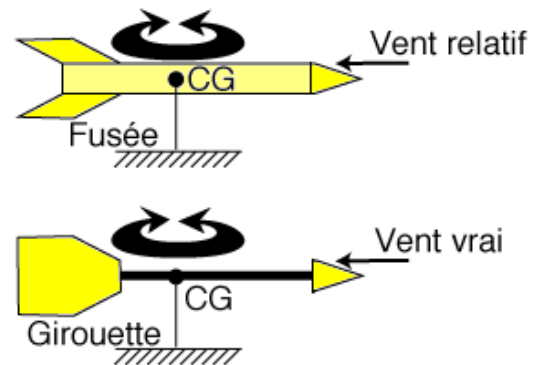
Pour plus d'explications sur les raisons de ces différents critères, cf [Evolution des critères de stabilité en annexe](#).

## 2.5. Analogie avec une Girouette.

Il est intéressant de noter la correspondance qui existe entre une fusée en vol et une girouette.

Si on place une fusée stable sur un pivot piqué à son Centre de Masse (CG), elle se comporte comme une girouette.

Comme le corps cylindrique de la fusée présente très peu de portance, il est représenté par une fine tige sur la girouette.



<http://www.azstarnet.com/%7Eelb/rockets/>

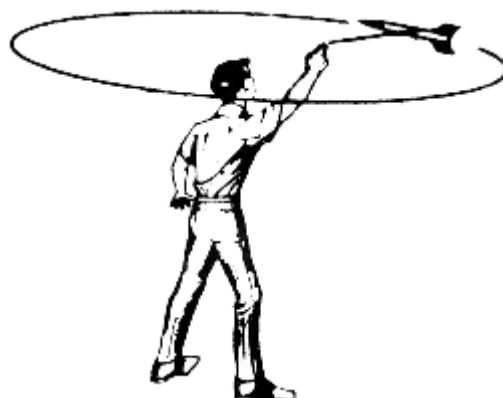


## 2.6. Test de la ficelle.

Voici une méthode expérimentale, qui permet d'estimer la stabilité d'une **MicroFusée** (dimensions réduites). Il s'agit simplement d'accrocher une ficelle au niveau du Centre de Masse de la fusée complète (avec propulseur), puis de la faire tourner autour de soi. Si la fusée est stable aux basses vitesses de l'essai, elle le sera également aux grandes vitesses du vol.



Un exercice très simple pour évaluer la stabilité d'une fusée



# Chapitre 3 - Calcul de la Portance.

- [Chapitre 1 - Généralités sur le vol de la fusée.](#)
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#)
- **[Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#)**
  - [3.1. Méthodes élémentaires.](#)
  - [3.2. Méthode de Barrowman.](#)
  - [3.3. Barrowman amélioré.](#)
  - [3.4. Autres méthodes.](#)
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#)
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#)
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#)
- [Annexes.](#)

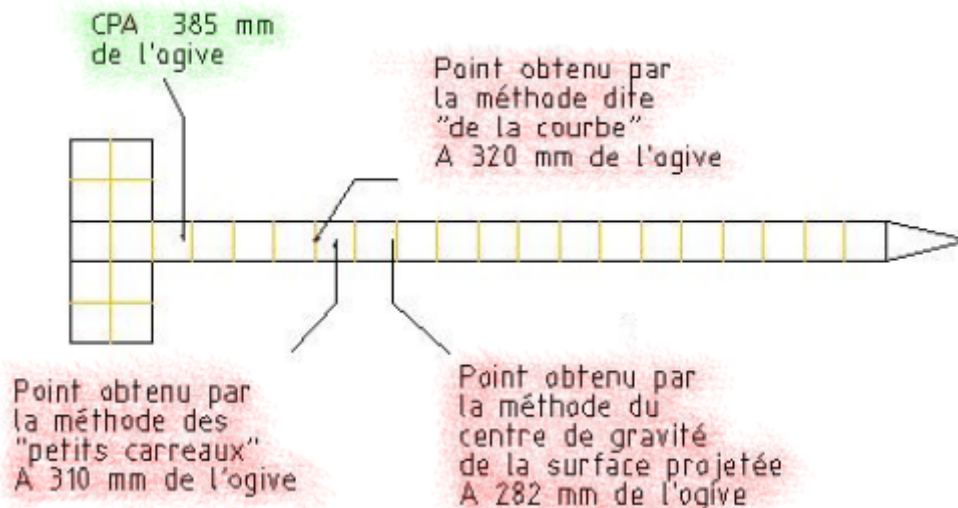


## 3.1. Méthodes élémentaires.

### Halte aux idées reçues !

Il n'existe pas de méthode simple pour déterminer, même de façon approximative, la position du Centre de Poussée Aérodynamique (CPA).

Certaines méthodes ont pourtant été utilisées par le passé sans grandes justifications physiques, elles sont donc à proscrire car ne donnent pas de résultats suffisamment précis pour garantir une bonne prévision de la stabilité.



Ces méthodes considèrent que le corps de la fusée a une portance équivalente à un aileron de même surface, or le tube cylindrique ne présente pratiquement pas de portance comparé aux ailerons.

## Au jugé, intuition visuelle

Pour des **MicroFusées** simples, le facteur essentiel pour la position du Centre de Poussée Aérodynamique (CPA) est la position des ailerons, qui subissent une forte action de l'air. Pour s'en convaincre il suffit de regarder la fusée et de comparer les surfaces relatives des ailerons et de l'ogive.

L'ogive apportant une petite contribution à la Portance, la position du Centre de Poussée Aérodynamique (CPA) est située vers l'avant des ailerons ("Base" des ailerons).



## Logiciels de Stabilité

Concrètement, le calcul de la stabilité d'une fusée se réalise de nos jours à l'aide d'outils informatiques. Dans le réseau Planète Sciences, citons quelques logiciels de stabilité et de trajectographie (en Français) :

- Trajec, par Arnaud Colmon (logiciel officiel pour les contrôles des minifusées et fusées expérimentales)
- Carina, par Frédéric Bouchar

Ces logiciels sont librement téléchargeables sur le site internet [www.planete-sciences.org/espace/](http://www.planete-sciences.org/espace/).

Pour calculer la stabilité de la fusée, ces logiciels utilisent la méthode de Barrowman détaillée ci-dessous.

## 3.2. Méthode de Barrowman.

### Principe : décomposition et barycentre

La méthode de Barrowman permet de calculer la valeur du Gradient de Portance par rapport à l'incidence  $\alpha$  ( $C_{n\alpha}$ ) et la position du Centre de Poussée Aérodynamique ( $X_{cpa}$ ) de l'ensemble de la fusée à partir du  $C_{n\alpha}$  et du  $X_{cpa}$  des différents éléments constitutifs de la fusée (ogive, ailerons, parties tronconiques). Les parties cylindriques du corps de la fusée étant considérées comme n'exercant pas de Portance, elles sont absentes des équations qui suivent.

- Le Gradient de Portance total  $C_{n\alpha}$  est égal à la somme des gradients de Portance.
- La position du Centre de Poussée Aérodynamique total est obtenue en calculant la moyenne des CPA pondérées par leur gradient de Portance (barycentre).

Dans le cas d'une fusée simple, sans changement de diamètre :

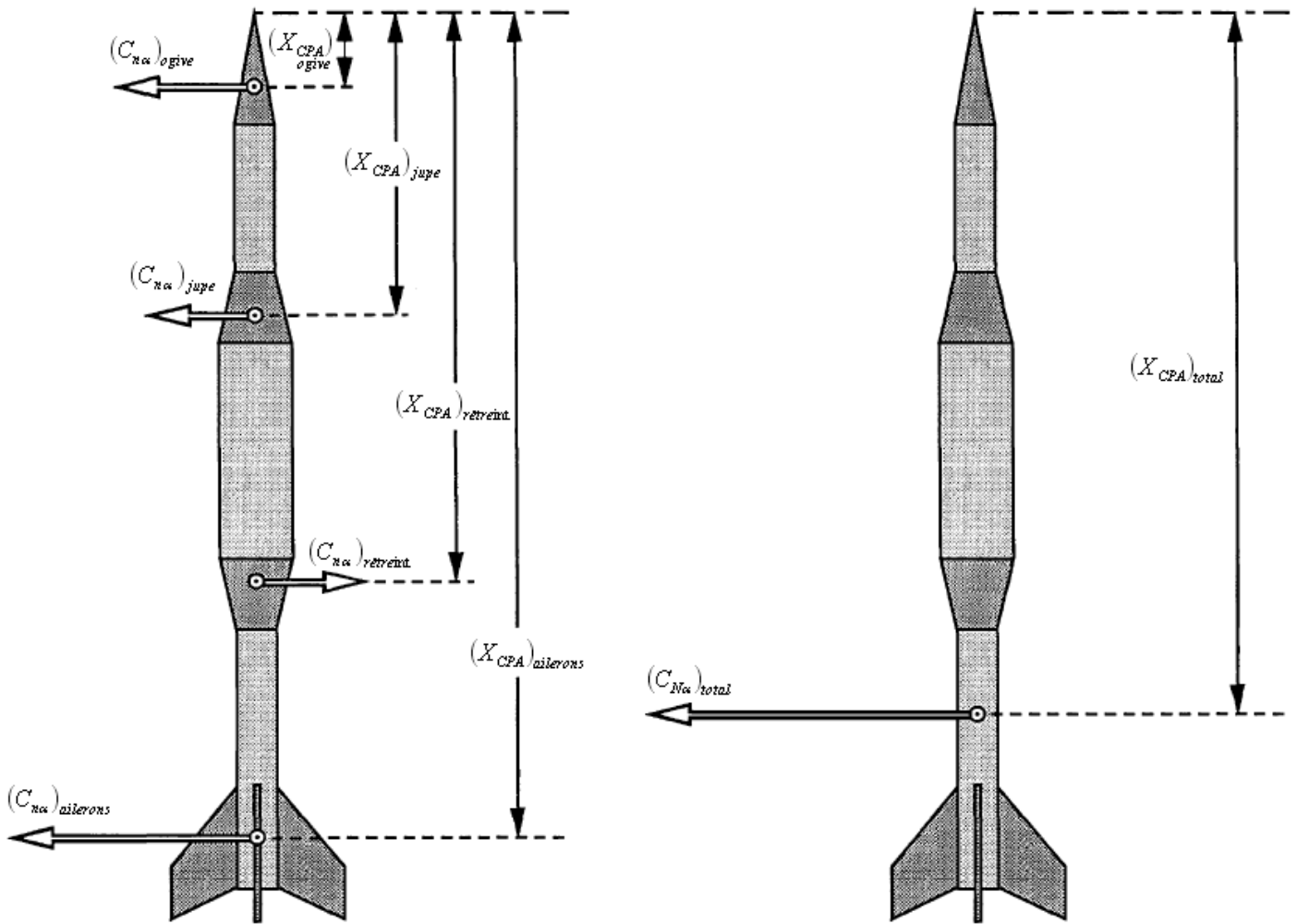
$$(C_{n\alpha})_{total} = (C_{n\alpha})_{ogive} + (C_{n\alpha})_{ailerons}$$
$$(X_{CPA})_{total} = \frac{(X_{CPA})_{ogive} \times (C_{n\alpha})_{ogive} + (X_{CPA})_{ailerons} \times (C_{n\alpha})_{ailerons}}{(C_{n\alpha})_{ogive} + (C_{n\alpha})_{ailerons}}$$

Dans le cas d'une fusée avec une jupe et un rétreint :

$$(C_{n\alpha})_{total} = (C_{n\alpha})_{ogive} + (C_{n\alpha})_{jupe} + (C_{n\alpha})_{r\acute{e}treint} + (C_{n\alpha})_{ailerons}$$
$$(X_{CPA})_{total} = \frac{(X_{CPA})_{ogive} \times (C_{n\alpha})_{ogive} + (X_{CPA})_{jupe} \times (C_{n\alpha})_{jupe} + (X_{CPA})_{r\acute{e}treint} \times (C_{n\alpha})_{r\acute{e}treint} + (X_{CPA})_{ailerons} \times (C_{n\alpha})_{ailerons}}{(C_{n\alpha})_{ogive} + (C_{n\alpha})_{jupe} + (C_{n\alpha})_{r\acute{e}treint} + (C_{n\alpha})_{ailerons}}$$

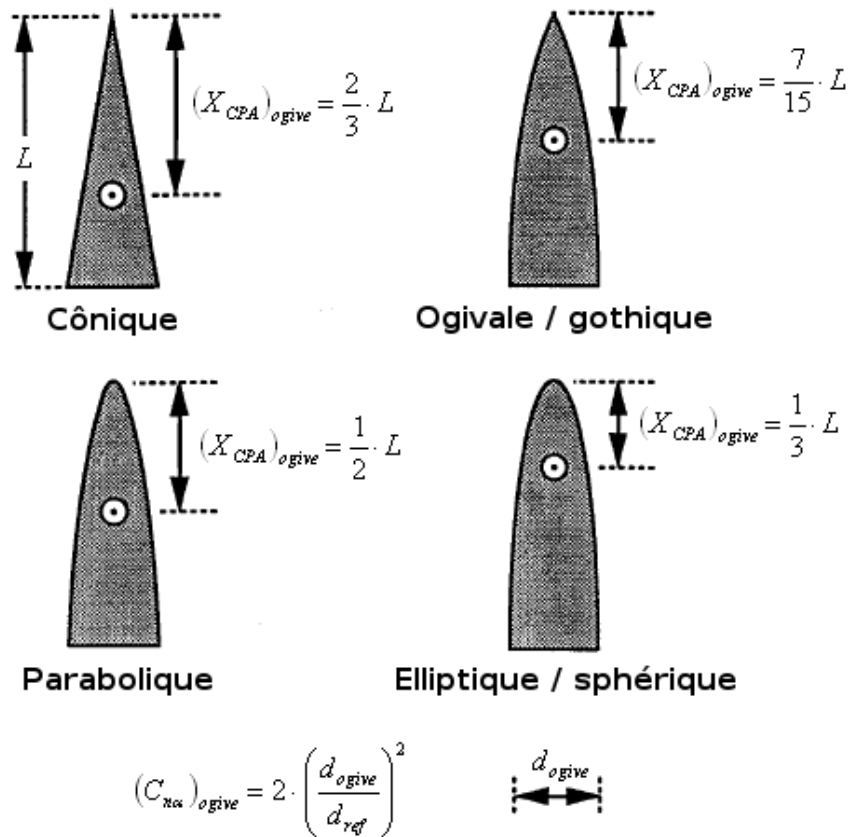
Toutes les distances  $X_{cpa}$  doivent être données dans la même unité (généralement le millimètre) et à partir d'un même point de référence (généralement la pointe de l'ogive).

Vous pouvez ajouter ou supprimer des termes pour adapter la formule à votre fusée.



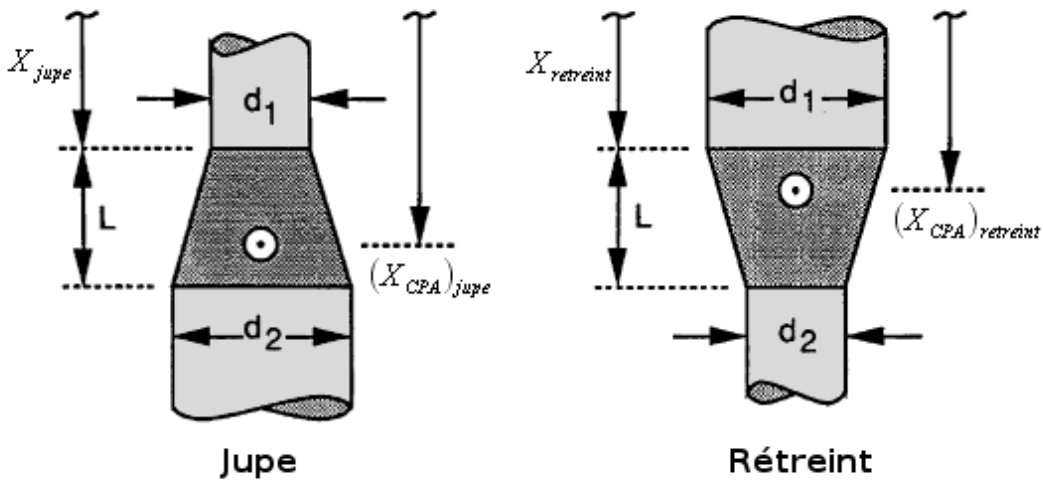
La détermination des  $C_{n\alpha}$  et  $X_{cpa}$  de chaque élément se fait à partir des formules suivantes.  
 On prend généralement comme diamètre de référence le diamètre à la base de l'ogive ( $d_{ref} = d_{ogive}$ ).

## Ogives



Pour plus de détails sur les formules des différentes ogives et leurs performances, voir [Nose cone design](#) sur en.wikipedia.

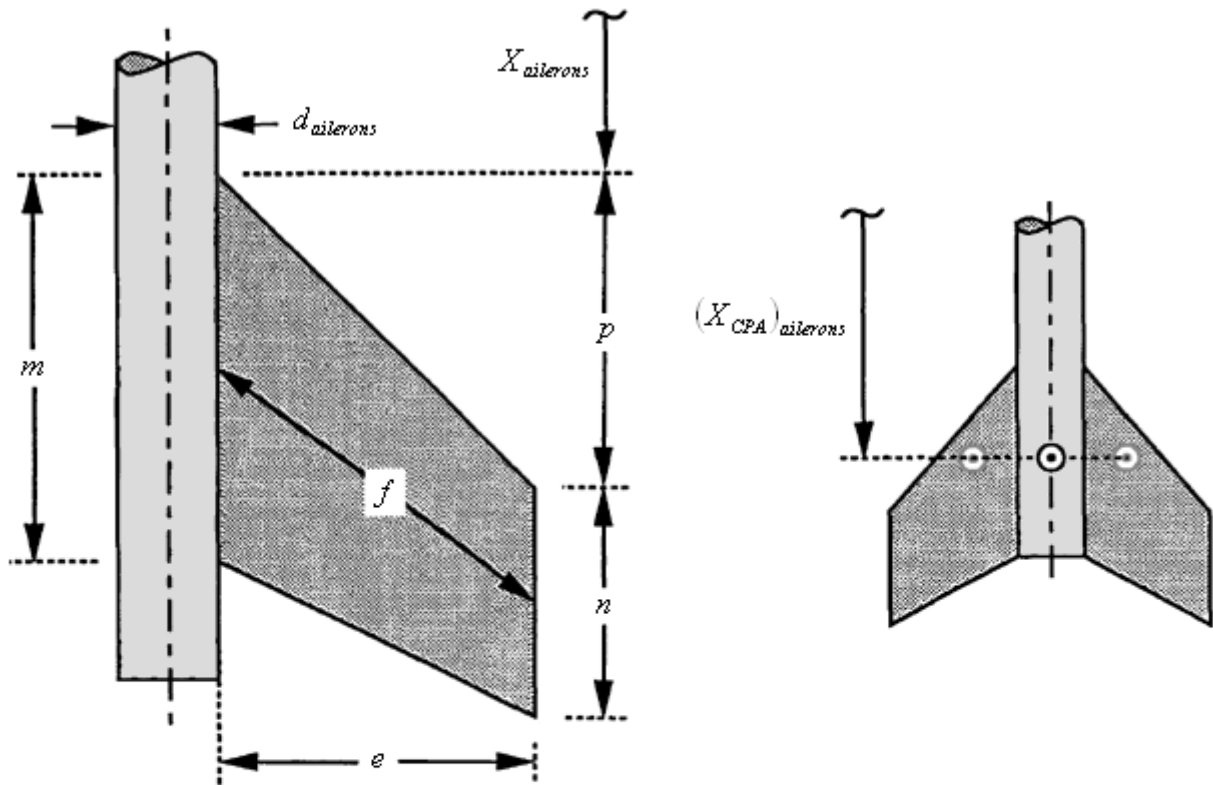
## Jupes et rétreints (changements de diamètre)



$$(C_{n\alpha})_{jupe\ ou\ retrait} = 2 \cdot \left( \left( \frac{d_2}{d_{ref}} \right)^2 - \left( \frac{d_1}{d_{ref}} \right)^2 \right) \quad \text{d'où } (C_{n\alpha})_{retrait} < 0$$

$$(X_{CPA})_{jupe\ ou\ retrait} = X_{jupe\ ou\ retrait} + \frac{L}{3} \cdot \left( 1 + \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_2}} \right)$$

## Ailerons trapézoïdaux



$$(C_{n\alpha})_{ailerons} = \left(1 + \frac{d_{ailerons}}{2e + d_{ailerons}}\right) \cdot \frac{4 \cdot Q \cdot \left(\frac{e}{d_{ref}}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2f}{m+n}\right)^2}}$$

avec  $Q$  le nombre d'ailerons

$$\text{et } f = \sqrt{e^2 + \left(p + \frac{n-m}{2}\right)^2}$$

$$(X_{CPA})_{ailerons} = X_{ailerons} + \frac{p(m+2n)}{3(m+n)} + \frac{1}{6} \left(m+n - \frac{m \cdot n}{m+n}\right)$$

( $p$  peut être négatif)

## Abaques & méthode graphique

Si on le désire, il est possible de calculer chacun des termes ( $C_{na}$  &  $X_{Cp}$ ) à l'aide de courbes graphiques (abaques).

Voir à ce sujet le document "*Calculating the Center of Pressure of a Model Rocket*" (cf. [Biblio](#)).

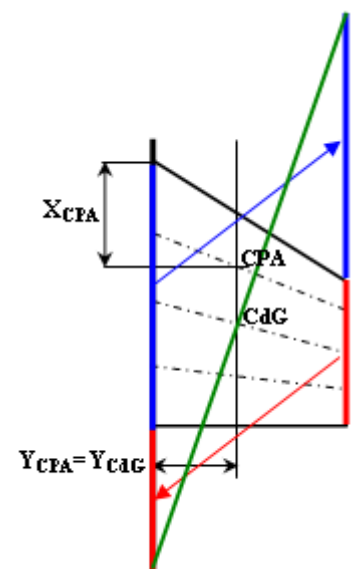
D'autre part, il existe une méthode graphique permettant de trouver le Centre de Surface (CdG) d'un aileron trapézoïdal.

Pour cela, on reporte l'emplanture et le saumon dans la continuité du saumon et de l'emplanture (le sens n'a pas d'importance).

Puis on trace la droite 'diagonale' reliant les deux extrémités isolées.

Le CdG se trouve à l'intersection entre cette droite 'diagonale' et la ligne des demi-cordes (milieu entre bord d'attaque et bord de fuite).

Le Centre de Portance des ailerons se situe alors à 25% de la corde (ligne verticale) passant par le CdG, en partant du bord d'attaque.



## Démonstration & hypothèses

La démonstration des formules de Barrowman, dont les résultats viennent d'être donnés, se trouve dans 2 des documents écrits par James Barrowman (cf. [Biblio](#)).

Il précise notamment les méthodes et hypothèses utilisées, à savoir :

- le gradient de force normale ( $C_{n\alpha}$ ) d'une plaque plane fine (aileron) est donné, en flux subsonique, par la **méthode semi-empirique de Diedrich**
- le  $C_{n\alpha}$  du corps (ogive...) est basée sur la théorie des corps élancés à symétrie axiale ("*slender-body theory*")
- angle d'attaque proche de  $0^\circ$
- flux d'air subsonique, continu, irrotationnel, incompressible
- fusée rigide, non-guidée (non-pilotée)
- transitions (jupes/rétréints) de  $12^\circ$  maximum
- portance des tubes cylindriques négligés
- interférences inter-ailerons négligés
- ...

Citation de "*Design of Aerodynamically Stabilized Free Rockets*" : les hypothèses fondamentales de cette théorie sont que les dérivées partielles de 2<sup>nd</sup> ordre de la vitesse peuvent être négligées et que les perturbations de la vitesse dans l'axe longitudinal sont faibles comparées aux valeurs transverses. Cette solution implique qu'ajouter de la longueur au tube n'a pas d'effet, et qu'il n'y a pas d'effet de compressibilité due à la variation du nombre de Mach. Cependant, les données expérimentales et les solutions théoriques plus raffinées montrent que ces effets sont significatifs. Depuis les années 1960, beaucoup de données expérimentales sont devenues accessibles, et autant que possible, il est fortement recommandé de les utiliser plutôt que des solutions théoriques.

## 3.3. Barrowman amélioré.

### Ailerons plats de forme quelconque

Lorsqu'on souhaite calculer la stabilité d'une fusée dont les ailerons ne sont pas trapézoïdaux, les formules de Barrowman ne peuvent pas s'appliquer directement.

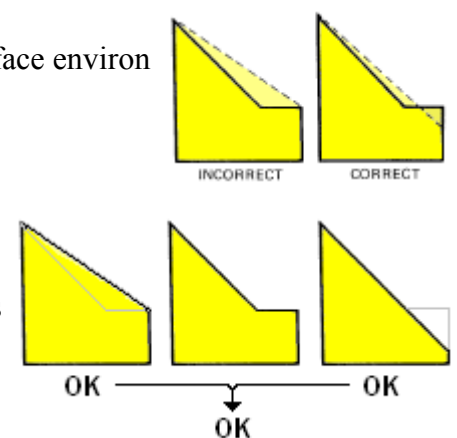
Si la forme des ailerons n'est pas trop "exotique" (angles vifs, contour très concave ...), il est néanmoins possible de calculer la position du CPA et de la valeur du  $C_{n\alpha}$ .

#### Première approximation

Une première approximation consiste à trouver un trapèze équivalent de surface environ égale, pour lequel on applique la méthode classique de Barrowman.

#### Encadrement

Il est aussi possible d'encadrer l'aileron de forme quelconque par un trapèze inscrit et un trapèze circonscrit, et de vérifier la stabilité pour ces configurations majorante et minorante. Si la fusée est stable avec chacun des deux ailerons trapézoïdaux encadrant, alors la fusée l'aileron quelconque sera nécessairement stable.



Il est également possible de revenir aux définitions théoriques de la position du CPA et de la valeur du  $C_{n\alpha}$  :

## Position du CPA

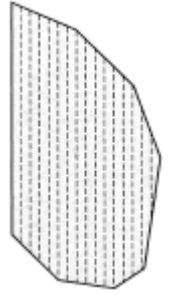
On sait que pour un aileron plat trapézoïdal, le CPA est situé à un quart de la corde passant par le CdG, en avant du CdG (Centre de Surface).

Pour un aileron plat de forme quelconque, la longueur de la corde passant par le CdG peut être non-représentative de l'ensemble de l'aileron.

On peut utiliser la longueur moyenne des cordes, mais cette méthode ne donne alors pas les mêmes résultats que la méthode de Barrowman (pour des ailerons trapézoïdaux).

On peut aussi approximer linéairement l'évolution de la longueur de la corde, puis estimer la longueur au niveau du CdG (en  $Y_c$ ).

Dans tous les cas, il faut aussi calculer la position du CdG ( $X_c, Y_c$ ) et la surface d'un aileron ( $S_{aileron}$ ). Il est possible de le faire par calcul numérique en décomposant l'aileron en bandeaux verticaux de petite largeur dont on détermine les longueurs de corde.



## Calcul du $C_{n\alpha}$

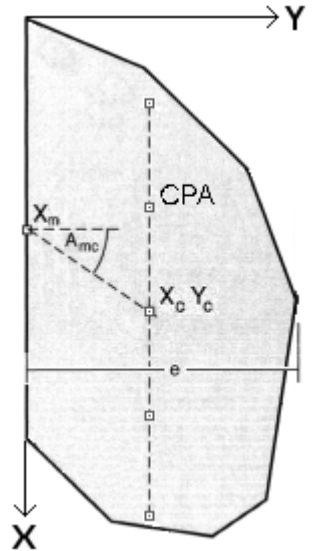
Il suffit de revenir à une définition plus générale de la formule de Barrowman :

$$(C_{n\alpha})_{ailerons} = \left(1 + \frac{d_{ailerons}}{2e + d_{ailerons}}\right) \cdot \frac{4 \cdot Q \cdot \left(\frac{e}{d_{ref}}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{AR}{2 \cdot \cos(A_{mc})}\right)^2}}$$

avec l'allongement "Aspect Ratio"  $AR = 2 \cdot e^2 / S_{aileron}$  et l'angle de flèche  $A_{mc}$  (mid-chord).

Pour des ailerons quelconques, on prends l'envergure max pour 'e', et la flèche passant par le milieu de l'emplanture et par le CdG pour calculer  $A_{mc}$ .

D'après Pythagore, on a donc :  $\cos(A_{mc}) = Y_c / (Y_c^2 + (X_c - X_m)^2)^{1/2}$ .



## RockSim

Le logiciel RockSim permet de calculer la stabilité d'une fusée à aileron plat de forme quelconque.

Il emploie une méthode qui utilise la longueur moyenne des cordes pour calculer le  $X_{cp}$ .

Pour la description de la méthode RockSim, cf. "Numeric Methods in Model Rocket Design, RockSim Method equations" en [Biblio](#).

Ce document présente aussi une méthode analytique du calcul de l'aire et du CdG d'un aileron quelconque par décomposition en triangles.

## Interaction entre les ailerons et le corps

Dans la formule de Barrowman donnant le  $C_{n\alpha}$  des ailerons, le facteur  $K_T(B) = (1 + d_{ail} / (2 \cdot e + d_{ail}))$  est un facteur correctif de la portance des ailerons en présence du tube (corps cylindrique), valable pour 3 ou 4 ailerons. Le quotient correctif doit être réduit de moitié pour 6 ailerons  $(1 + 1/2 \cdot d_{ail} / (2 \cdot e + d_{ail}))$ .

Son expression peut être affinée via une formule plus complexe, et complétée par un 2<sup>e</sup> facteur correctif  $K_B(T)$  à additionner à  $K_T(B)$  :

$$K_B(T) = 0,7809 \times (d_{ail} / (2 \cdot e + d_{ail}))^2 + 1,2 \times (d_{ail} / (2 \cdot e + d_{ail}))$$

Le logiciel Rocksim utilise une expression simple de ces 2 facteurs correctifs.

Cf. "Extending The Barrowman Method For Large Angle Of Attack" p8,

"The practical calculation of the aerodynamic characteristics of slender finned vehicles" p39,

"Design of Aerodynamically Stabilized Free Rockets" p260, et surtout :

"Lift and Center of Pressure of Wing-Body-Tail combinations" p3 en [Biblio](#).



## Interaction entre 2 empennages

Si la fusée possède 2 séries de voilure, les turbulences créées par les ailerons du haut ("canards") vont perturber la portance des ailerons du bas. La distance entre les ailerons n'est pas suffisante pour supprimer tous les tourbillons.

En première approche, on peut estimer que la portance de la partie masquée des ailerons (située en dessous d'un canard) a une portance réduite de moitié.

Pour affiner cette interaction, cf. "*Lift and Center of Pressure of Wing-Body-Tail combinaisons*" p10 et "*Design of Aerodynamically Stabilized Free Rockets*" §5.3.4.3 en [Biblio](#).

## Portance des tubes cylindriques et stabilité en incidence

La portance d'ogives de 3 calibres de longueur et d'un corps cylindrique de 4 à 11 calibres de longueur est plutôt vers  $C_{n\alpha} = 2.4$  et  $X_{cp}$  = bas de l'ogive, ce qui laisse entendre que le corps apporte un  $C_{n\alpha}$  de 0.4 placé non loin de son milieu.

Cf. "*Design of Aerodynamically Stabilized Free Rockets*" figures pages 323 et 339.

Il est possible de modéliser la portance des tubes cylindriques avec un terme fonction du carré de l'incidence ( $\alpha^2$ ) (cf. annexe [Aero](#)).

Les paramètres de stabilité ( $C_{n\alpha}$  et  $X_{cp}$ , Marge "Dynamique") dépendent alors de l'incidence.

En général, la position du CPA remonte lorsque l'incidence augmente, et il est possible de déterminer l'incidence maximum telle que Marge > 0.

Ce type de modélisation est très intéressant pour un simulateur dynamique, qui calcule les coeffs en fonction de l'incidence.

Cf. "*Wind Instability, What Barrowman Left Out*" et "*Extending The Barrowman Method For Large Angle Of Attack*" en [Biblio](#).

On peut aussi considérer le décrochage des ailerons, qui intervient à partir de 10 à 20° d'incidence.

Cf. "*Extending The Barrowman Method For Large Angle Of Attack*".

## 3.4. Autres méthodes.

### Modélisation Éléments Finis

La fusée est modélisée sous un logiciel de CAO (*par exemple Solidworks ou Catia*), représentée par un maillage (*Gambit*), puis un calcul par éléments finis (*Fluent*) permet de simuler le flux et les efforts aérodynamiques.

Attention aux nombreux choix de modélisation (maillage 2D ou 3D, maillage structuré ou non, écoulement laminaire ou turbulent, nombre de Reynolds ...). Cette méthode demande une bonne connaissance théorique pour réaliser une modélisation correcte.

La méthode de calcul EULER est souvent utilisée (écoulement fluide instationnaire), ainsi que NAVIER-STOKES.

Il est possible d'obtenir une estimation (à 10% ou 20% près) des coefficients et forces aérodynamiques en fonction de l'incidence et du nombre de Mach.

Cette méthode, dite de "soufflerie numérique", a l'avantage d'être abordable financièrement (pour des industriels), au détriment de temps de calcul très long.

Citons ici "WingBody", logiciel développé par la NASA. Il permet dans un premier temps de réaliser puis de visualiser un maillage simple de la géométrie étudiée (fuselage de révolution & ailerons). Sa méthode de calcul consiste à remplacer la configuration "aile fuselage" par des distributions de singularités, satisfaisant les

équations de la théorie du potentiel linéarisé (écoulement faiblement perturbé).

## Soufflerie expérimentale

La fusée, ou une maquette miniature, est positionnée à l'incidence souhaitée dans une soufflerie équipée d'instruments de mesures ("balance aérodynamique" ou prises de pressions le long du profil).

Un écoulement d'air circule dans la veine d'essai à la vitesse considérée.

Il est possible d'obtenir une bonne mesure des coefficients et forces aérodynamiques en fonction de l'incidence et du nombre de Mach.

Cette méthode est limitée par les capacités de la soufflerie (dimensions, nombre de Mach), et l'accès à une soufflerie de bonne qualité est très onéreux (sans jeu de mots avec l'ONERA). Néanmoins, l'usage de petites souffleries "fabriquées maison" peut déjà constituer un élément pédagogique formidable.

Notons l'existence de base de données publiques de mesures en soufflerie, constituées par exemple par le DFVLR (Deutsche Forschungs und Versuchsanstalt für Luft und Raumfahrt, 1970) et le RAE (Engineering Design Data Unit – Royal Aeronautical Society - London).

## Codes semi-empiriques

Les méthodes rapides de prévision des caractéristiques aérodynamiques des fusées ou missiles sont généralement basées sur le principe de décomposition en différents éléments (fuselage, ailerons, interactions...) ("*Component BuildUp method*"). La théorie a été développée par Pitts et al (1951), Allen & Perkins (1951), Jorgensen (1958-1978), Sigal (1989).

En France, le "Code Missile" de l'ONERA est un logiciel qui permet de prévoir l'aérodynamique des missiles industriels en phase d'avant-projet (1986...).

Il s'agit d'un code semi-empirique de prévision des coefficients aérodynamiques, combinant des équations théoriques avec des données expérimentales (essais en soufflerie).

Il est possible d'obtenir rapidement une bonne estimation (à 10% près) des coefficients et forces aérodynamiques en fonction de l'incidence et du nombre de Mach.

L'accès à cet outil est restreint pour des raisons de confidentialité, mais des industries et organismes françaises tel le CNES peuvent y avoir accès.

Une partie des équations utilisées par le code missile est en cours de publication, dans le cadre du programme PERSEUS (NLV-PR : programme MATLAB de calcul de Czi et de centrages).

Aux USA, "Missile DATCOM" est un code permettant d'estimer les caractéristiques aérodynamiques d'un missile ou avion quelconque (1963...).

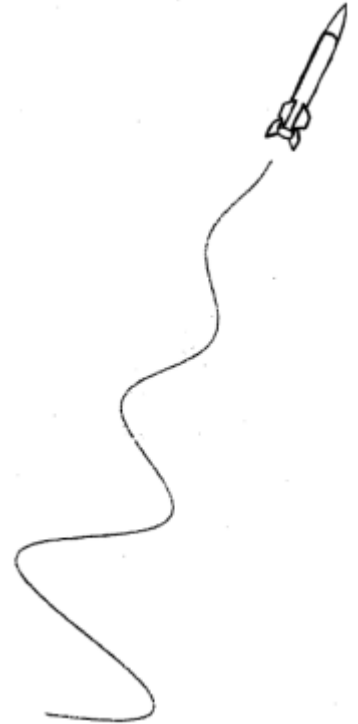
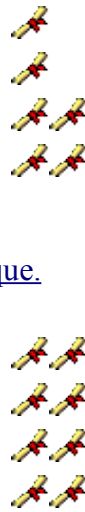
Il a été développé par McDonnell Douglas pour l'USAF (US Air Force), à partir de données expérimentales, et est également restreint aux industries nationales.

Néanmoins, "Digital DATCOM" est une version publique dont les données datent de 1979. Elle est téléchargeable gratuitement sur internet.

Notons que le code "WingBody" de la NASA est plus adapté au subsonique que DATCOM.

# Chapitre 4 - Stabilité dynamique.

- [Chapitre 1 - Généralités sur le vol de la fusée.](#)
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#)
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#)
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#)
  - [4.1. Oscillations non-amorties.](#)
  - [4.2. Amortissement des oscillations.](#)
  - [4.3. Exemple de calcul de stabilité dynamique.](#)
  - [4.4. Simulation de stabilité dynamique.](#)
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#)
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#)
- [Annexes.](#)



La stabilité "statique" consiste à placer le Centre de Poussée suffisamment en arrière du Centre de Masse. Mais quels sont les effets de cette position ? Que se passe-t-il lorsque le vent météo vient créer un angle d'attaque en sortie de rampe de lancement ?

La notion de stabilité dynamique tente de répondre à ces questions en analysant les oscillations de la fusée en rotation transversale *tangage* ou *lacet* ([déf. »](#)). L'objectif est de créer une fusée qui n'est pas facilement déviée de sa trajectoire, et qui une fois la perturbation passée, revient le plus vite possible à sa trajectoire initiale.

## 4.1. Oscillations non-amorties.

### Principe Fondamental de la Dynamique en rotation

Un petit rappel historique tout d'abord... Notre ami Sir Isaac Newton montrait en 1684 l'équivalence entre variation instantanée de la quantité de mouvement (masse multipliée par vitesse) et efforts. Cette formule fait partie de ce qu'on appelle les relations fondamentales de la dynamique.

Pour des objets en translation, ce principe permet d'aboutir à la formule familière :

$$\text{Somme des Forces} = \text{Masse} \times \text{Accélération} \quad \text{ou avec les symboles habituels : } F = m \cdot \gamma = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

Cette formule bien connue possède une petite sœur qui traite des objets en rotation :

$$\text{Somme des Couples} = \text{Moment d'Inertie} \times \text{Accélération angulaire} \quad \text{ou avec les symboles un peu moins habituels : } C = I \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

( $\omega$  désigne ici la vitesse de rotation en radians/s, et I l'inertie)

Un moment d'inertie s'exprime en Kilogramme.Mètre<sup>2</sup> et dépend de l'axe de la rotation choisi. Il est égal à une somme pondérée par le carré de la distance à cet axe de tous les éléments de masse constituant l'objet. Cf. annexe sur l'[Inertie](#).

Cette relation va nous permettre de décrire les mouvements en rotation transversale (tangage ou lacet) de la fusée autour de son Centre de Masse.

Pour cela, il faut analyser les Moments qui s'appliquent à la fusée.

## Coefficient du moment de correction C1

Tout d'abord, quelques approximations :

Nous allons supposer que la vitesse du Centre de Masse est constante en direction et en valeur. Cette approximation est valable durant la phase balistique pour des fusées sur lesquelles la portance est faible. On suppose également que rien ne va atténuer les oscillations de la fusée. Enfin, on considère un vent météo nul ou constant.

Comme on a pu le voir dans les chapitres précédents, la poussée du moteur et la gravité ne créent pas de Moment faisant tourner la fusée.

En revanche, la force de Portance, associée au bras de levier que représente la Marge Statique, constituent un Moment dont l'expression s'écrit :

$$\text{Moment}_{\text{Portance}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_{\text{ref}} \cdot C_{na} \cdot \alpha \cdot V^2 \cdot (X_{CPA} - X_{CdG})$$

Voir l'expression de la Force de Portance en annexe [Aéro](#) pour avoir la définition des différents termes.

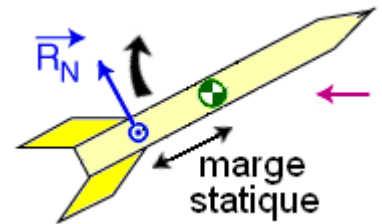
Ce Moment varie donc linéairement avec l'incidence  $\alpha$ , exprimée en radians.

On pose la constante  $C_1$  tel que  $\text{Moment}_{\text{Portance}} = C_1 \cdot \alpha$ ,

$$\text{soit } C_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_{\text{ref}} \cdot C_{na} \cdot V^2 \cdot (X_{CPA} - X_{CdG})$$

$C_1$  est parfois appelé "coefficient du Moment de correction" ; il s'exprime en N.m/rad.

Rappeleons que le calcul du  $C_{na}$  total à partir des  $C_{na}$  des différents éléments est disponible dans de nombreuses documentations (cf. [chapitre 3](#) & [Biblio](#)).



La relation fondamentale de la dynamique en rotation s'écrit alors :  $I \cdot \frac{d\omega}{dt} = -C_1 \cdot \alpha$

Le signe négatif indique que le Moment de Portance s'oppose à l'augmentation d'incidence.

La direction de la vitesse étant supposée constante la vitesse de rotation de la fusée est égale à la dérivée par rapport au temps de l'angle d'attaque :  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$

On obtient donc l'équation différentielle suivante :  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{C_1}{I} \alpha$

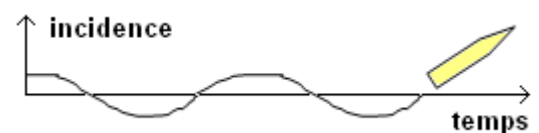
En français ceci signifie que la variation de la variation de alpha est proportionnelle à alpha.

On a là ce que les physiciens appellent un comportement d'oscillateur harmonique (comme une masse suspendue à un ressort, ou un pendule oscillant).

## Fréquence propre d'une fusée

Nos amis les mathématiciens nous montrent que les fonctions  $\alpha(t)$  solutions de l'équation différentielle ci-dessus sont toutes les fonctions sinusoïdales (  $\sin\omega_0 t$ ,  $\cos\omega_0 t$  ou une combinaison des deux)

avec une pulsation  $\omega_0$  en radians/seconde qui vaut  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1}{I}}$ .



Cette pulsation est nommée pulsation naturelle, pulsation libre ou pulsation propre, et la fréquence associée est  $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ .

Il est alors intéressant de faire apparaître l'expression de  $C_1$  car le terme  $V^2$  peut être extrait de la racine :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho \cdot S_{ref} \cdot C_{mz} \cdot (X_{CPA} - X_{CDG})}{2 \cdot I}} \cdot V$$

Pour des fusées standard, il est recommandé d'avoir une pulsation naturelle  $\omega_0$  comprise entre  $0,2 \cdot V$  et  $1,0 \cdot V$  (où  $V$  est la vitesse en m/s), un peu moins en fusex ( $0,15 \cdot V$  à  $0,2 \cdot V$ ).

Une fréquence trop basse indique une Inertie trop élevée par rapport au coefficient du moment de correction, donc une accélération angulaire faible, ou encore une vitesse de réaction qui peut être trop faible pour assurer un vol sûr et stable. Inversement, une fréquence trop haute indique une fusée facilement perturbable dont l'apogée risque d'être réduite à cause d'oscillations rapides tout au long du vol.

## Longueur d'onde d'une fusée

La période de l'oscillation est le temps  $T$  tel que  $\omega_0 \cdot T = 2\pi$ . La période vaut donc  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C_1}}$

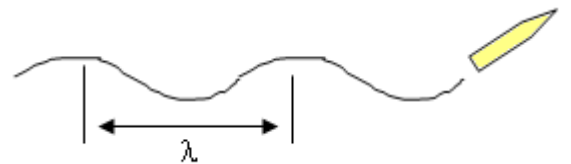
En exprimant  $C_1$ , on obtient  $T = 2\pi \sqrt{\frac{2 \cdot I}{\rho \cdot S_{ref} \cdot C_{mz} \cdot (X_{CPA} - X_{CDG})}} \cdot \frac{1}{V}$

Il s'agit d'une période temporelle. La présence du terme  $1/V$  est formidable. En effet, la distance parcourue par la fusée durant une oscillation vaut  $V \cdot T = \text{Vitesse} \times \text{Période}$ .

Cette distance est appelée longueur d'onde de la fusée et vaut donc

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2 \cdot I}{\rho \cdot S_{ref} \cdot C_{mz} \cdot (X_{CPA} - X_{CDG})}}$$

Si on néglige la variation de  $I$  et de  $\rho$  durant le vol, ce terme est une constante du vol.



## 4.2. Amortissement des oscillations.

### Coefficient d'amortissement $C_2$

Nous avons calculé les périodes et pulsations dans le cas où la fusée oscillerait sans amortissement. Mais nous savons par l'observation que ces oscillations disparaissent au cours du vol.

Il y a effectivement des forces qui vont freiner ces oscillations. L'expérience montre qu'elles sont approximativement proportionnelles à la vitesse de rotation et opposés à celle-ci. Le Moment qu'elles génèrent peut donc s'écrire  $C_2 \frac{d\alpha}{dt}$ .

$C_2$  est appelé coefficient d'amortissement ; il s'exprime en N.m/(rad/s).

## Oscillations amorties

Commençons par observer les conséquences de cet amortissement.

Le Principe Fondamental de la Dynamique tenant compte de l'amortissement s'écrit alors :

$$I \frac{d\omega}{dt} = -C_1 \alpha - C_2 \frac{d\alpha}{dt}$$

On s'intéresse aux solutions mathématiques de cette équation différentielle.

On pose la pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1}{I}}$  et le coefficient d'amortissement (zêta)  $\zeta = \frac{C_2}{2.I.\omega_0} = \frac{C_2}{2\sqrt{IC_1}}$  (ça allège

les formules)

Avec les mêmes hypothèses ( $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ ), l'équation différentielle peut alors s'écrire :

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2\omega_0 \zeta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0$$

Cette équation du second ordre, bien connue des physiciens, est caractéristique d'un oscillateur amorti.

En fait le coefficient  $\zeta$  défini pour alléger les calculs a un sens physique. Il permet de caractériser l'amortissement et est donc baptisé "taux d'amortissement".

Lorsque  $\zeta < 1$ , les solutions de l'équation différentielle sont de type sinusoïdale amortie (cf. figure ci-contre).

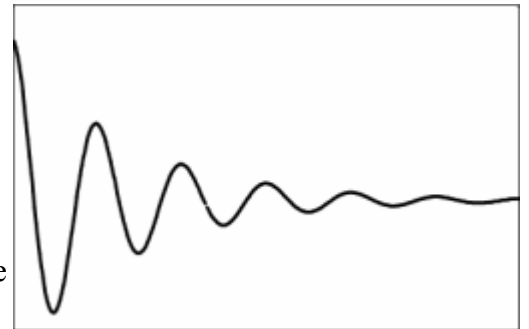
On peut définir une 'pseudo-période' (temps entre 2 maxima) qui vaut :

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0} = \frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

la période  $T$  étant celle du système lorsqu'il n'y a pas d'amortissement (on parle aussi de 'période libre' ou 'période propre' du système), et que nous avons précédemment calculée.

Le rapport des amplitudes entre deux maxima successifs vaut :

$$\exp(-2.\pi.\zeta / (1-\zeta^2)^{1/2})$$



## Applications aux fusées

D'un point de vue pratique, l'amortissement des oscillations d'une fusée ne doit être ni trop petit, ni trop grand :

- Si  $\zeta \geq 1$  (suramortissement ou amortissement critique), les fusées n'oscillent pas et mettent un temps long avant de se stabiliser sur leur vent relatif. On parle alors d'instabilité dynamique. Les cas où  $\zeta < 1$  sont préférables.
- Un amortissement supérieur à 0,3 diminue les performances de la fusée par augmentation de la traînée.
- Les cas où  $\zeta$  est proche de zéro ( $\zeta < 0,05$ ) sont à éviter car les oscillations risquent d'avoir lieu durant tout le vol et vont réduire les performances de la fusée.

En MicroFusées les valeurs 'classiques' de  $\zeta$  sont de l'ordre de 0,05 à 0,2.

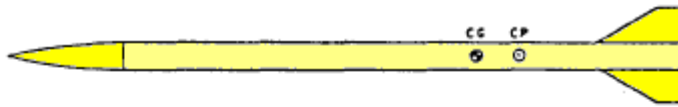
Notons que l'objectif n'est pas d'avoir un temps de réponse minimum à une perturbation ( $\zeta=0,7$ ), car cela conduirait la fusée à s'aligner trop rapidement en sortie de rampe sur le vent météo (les anglo-saxons parlent alors de 'weathercocking' qu'on pourrait traduire par 'girouettage').

## Que faire ?

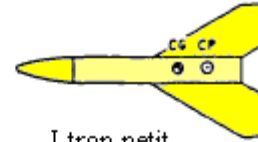
Pour la conception de la fusée il est évidemment conseillé de se placer dans des critères de bonne stabilité dynamique. Si les perturbations ne peuvent être atténuées, ceci permet de limiter leurs effets.

On peut facilement régler le  $\zeta$  d'une fusée en jouant sur la taille et la position de l'empennage. A condition de connaître le moment d'inertie  $I$  et de calculer  $C_1$  et  $C_2$  (voir paragraphes suivants).

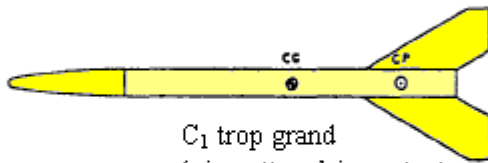
Donnons, à titre d'exemple, quelques cas typiques dans le cadre des MicroFusées où le moment d'inertie est très proche de celui du cylindre homogène :



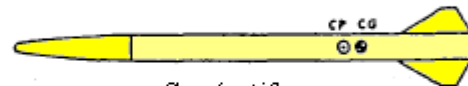
$I$  trop grand  
 $\zeta$  trop petit  
oscillations longues



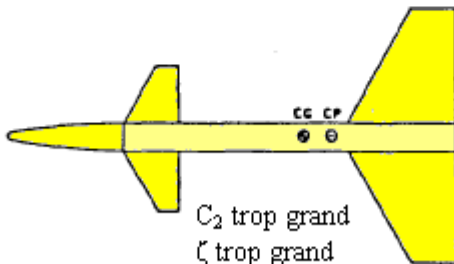
$I$  trop petit  
facilement perturbé  
 $\zeta$  trop grand



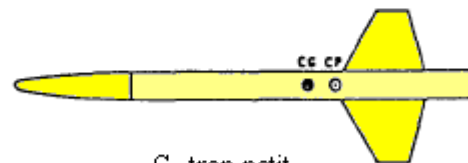
$C_1$  trop grand  
'girouettage' important



$C_1$  négatif  
statiquement instable



$C_2$  trop grand  
 $\zeta$  trop grand  
traînée importante



$C_2$  trop petit  
 $\zeta$  trop petit  
oscillations longues

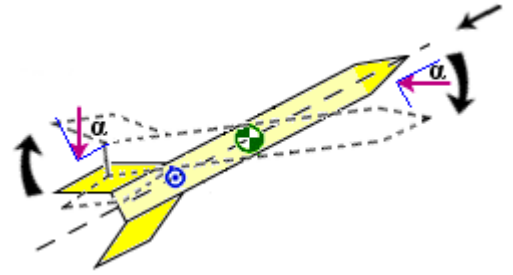
d'après Fundamentals of dynamic stability G.K Mandell

Les Moments d'amortissement ont plusieurs origines. Il y a la différence entre les angles d'attaque locaux des différents éléments de la fusée lors d'une oscillation. Il y a également le mouvement transversal du Centre de Masse. Citons enfin l'éjection de matière par le propulseur (débit de combustion).

## Amortissement purement rotatif

Les calculs du moment d'amortissement ont été présentés la première fois par J. Barrowman dans "*The practical calculation of the aerodynamic characteristics of slender finned vehicles*" (cf. [Biblio](#)).

La démarche théorique consiste à tenir compte du vent relatif de chaque élément aérodynamique de la fusée. En effet, lors d'une rotation, l'angle d'attaque n'est pas le même partout. On parle alors d'incidence locale. En supposant que le Centre de Masse suit une trajectoire rectiligne, on aboutit à la formule suivante :



$$C_{2 \text{ rotatif}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_{ref} \cdot V \cdot (C_{na1} \cdot \Delta L_1^2 + C_{na2} \cdot \Delta L_2^2 + \dots)$$

Les  $C_{n\alpha i}$  représentant les  $C_{n\alpha}$  des différents éléments et les  $\Delta L_i$  les distances 'Centre de Masse à Centres de Pression' ( $X_{CPA} - X_{CdG}$ ) de ces différents éléments.

Ce coefficient peut être mesuré en soufflerie.

## Amortissement par mouvement transverse du CdM

Nous avons dit que certaines fusées ont des trajectoires de type 'sinusoïde amortie' lorsqu'elles sont soumises à une perturbation. Ceci signifie que le CdM ne suit pas une trajectoire rectiligne. Ce mouvement du CdM amortit également le mouvement oscillant des fusées.

Pour de faibles angles d'incidence, on peut aboutir à un coefficient  $C_{2 \text{ translation}}$ , à ajouter au précédent, tel que :

$$C_{2 \text{ translation}} = I \cdot C_1 / (M \cdot \Delta L \cdot V) \quad \text{avec } M \text{ masse de la fusée, } V \text{ vitesse et } \Delta L \text{ distance } X_{CPA} - X_{CdG}$$

$$C_{2 \text{ translation}} = I \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_{ref} \cdot C_{na} \cdot V / M$$

On aboutit à ce résultat en décomposant le mouvement du CdM en une partie parallèle à la direction de la fusée et une partie transversale. En soufflerie, ce terme n'est évidemment pas facilement mesurable.

Pour décrire correctement ce type d'amortissement, l'idéal est la simulation informatique, qui confirme que l'expression ci-dessus est une très bonne approximation.

Naturellement, ce terme ne doit pas être considéré dans un simulateur dynamique qui calcule l'incidence en fonction du mouvement transverse du CdM.

## Amortissement par éjection de masse

Lorsque le moteur propulse la fusée, il y a un amortissement additionnel lié à l'expulsion de masse par la tuyère de la fusée (phénomène appelé "*jet damping*", cf. Davis, Follin and Blitzer : "*The Exterior Ballistics of Rockets*").

$$C_{2 \text{ propulsion}} = \dot{m} \cdot \Delta L_{tuyère}^2 \approx M_{poudre} / t_{combustion} \cdot \Delta L_{tuyère}^2 \quad \text{avec } \Delta L_{tuyère} \text{ la distance } X_{tuyère} - X_{CdM}$$

## Amortissement par couplage gyroscopique

Notons juste qu'en cas de vitesse de roulis non nulle, le couplage gyroscopique tend généralement à amortir les oscillations.

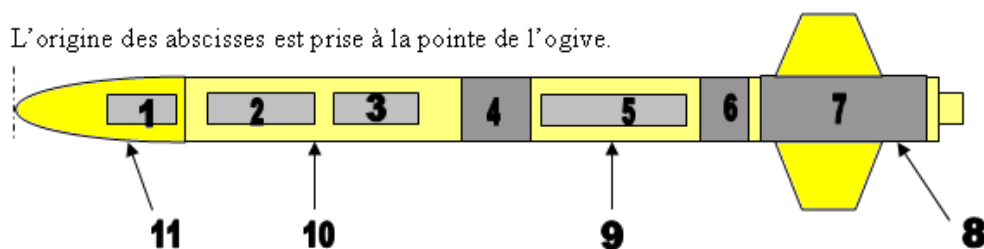
Cf. document de James Barrowman : "*The Practical Calculation of the Aerodynamic Characteristics of Slender Finned Vehicles*".



### 4.3. Exemple de calcul de stabilité dynamique.

#### Masse, Centrage et Inertie :

L'origine des abscisses est prise à la pointe de l'ogive.



Indice	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Position	$X_i$	0,25	0,45	0,6	0,7	0,85	1	1,2	1,2	0,85	0,5	0,2
Masse	$M_i$	0,2	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	3,7	0,8	0,6	0,8	0,3
Inertie	$I_i$	0	0	0	0	0	0	0,028	0,01	0,0045	0,01	0

- |                        |                      |
|------------------------|----------------------|
| 1. Emetteur            | 6. Plaque de poussée |
| 2. Accumulateurs       | 7. Propulseur        |
| 3. Case à expérience   | 8. Jupe              |
| 4. Pièce de séparation | 9. Peau parachute    |
| 5. Parachute           | 10. Peau expérience  |
|                        | 11. Ogive            |

La fusée est entièrement en diamètre 0.100m, on a donc  $S = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

Les moments  $I_7, I_8, I_9$  et  $I_{10}$  sont calculés comme pour des barreaux homogènes.

Les autres moments sont nuls car on considère des masses ponctuelles.

$$\text{On déduit du tableau : } X_{cg} = \frac{\sum_i M_i X_i}{\sum_i M_i} = 0,895 \quad \text{et} \quad I = \sum_i (M_i (X_i - X_{cg})^2 + I_i) \cong 1 \text{Kg.m}^2$$

Masse totale : 8,6 kg

Longueur : 1,4 mètre

#### Aérodynamisme :

	Empennage	Ogive	Total
$Cn\alpha$	20	2	22
$X_{cp}$	1,2	0,2	1,11

On a une marge statique de  $(1,11 - 0,895) / 0,100 = 2,15$  Calibre et un  $Cn\alpha = 22$ .

Du point de vue dynamique :

$$C_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot C_{m\alpha} \cdot (X_{cp} - X_{cg}) = 2,3 \cdot \rho \cdot S \cdot V^2$$

$$C_2_{\text{rotatif}} = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot V \cdot (Cn\alpha_{\text{ogive}} (X_{\text{ogive}} - X_{cg})^2 + Cn\alpha_{\text{empennage}} (X_{\text{empennage}} - X_{cg})^2) = 1,41 \cdot \rho \cdot S \cdot V$$

$$C_2_{\text{translation}} = C_1 \cdot I / (M \cdot V \cdot (X_{cp} - X_{cg})) = 1,23 \cdot \rho \cdot S \cdot V$$

En prenant  $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ , on trouve une longueur d'onde

$\lambda = 42$  mètres

$$\text{En cumulant les deux amortissements, on obtient : } \zeta = \frac{C_2_{\text{rotatif}} + C_2_{\text{translation}}}{2\sqrt{I \cdot C_1}} = 0,045$$

#### Conclusion :

Avec un propulseur type Chamois, la trajectoire parcourue par la fusée durant la phase propulsée a une longueur de 300 mètres. Pour une perturbation en sortie de rampe, il y aura donc entre 7 et 8 oscillations durant cette phase. De plus, le coefficient  $\zeta$  nous permet de dire qu'entre deux oscillations, l'amplitude est diminuée de 25%. En fin de propulsion, la perturbation perd donc 87% de son amplitude initiale.

## 4.4. Simulation de stabilité dynamique.

Il est possible de simuler le comportement dynamique d'une fusée, sans s'intéresser à sa trajectoire. Considérons une fusée avec une vitesse de vol  $V$  donnée, et on observe son mouvement de rotation autour de son Centre de Gravité lorsqu'on introduit des perturbations (vent, incidence initiale). On peut faire l'analogie avec une fusée testée en soufflerie, ou avec une girouette virevoltant au vent.

Voici un exemple de simulations temporelles obtenues pour 3 fusées de configurations aérodynamiques identiques (mêmes  $C_{na}$ ,  $MS$ ,  $C_1$ ), mais de masse et de moment d'inertie différents.

Les courbes de couleurs représentent l'assiette de la fusée en réponse à des perturbations de vent latéral (courbes grises).

Exemple de programme Matlab :

```

% Terminologie :
% Theta est l'angle d'assiette par rapport à la verticale
% Wind est l'ANGLE crée par le vent par rapport à la verticale
% Alpha est l'angle d'incidence résultant

% Mise en équation :
% D'après le PFD en rotation (equation du moment cinétique) :
% I * Theta'' = - Alpha * C1 - Alpha' * C2
% En remplaçant Alpha :
% I * Theta'' = - (Theta - Wind) * C1 - (Theta' - Wind') * C2

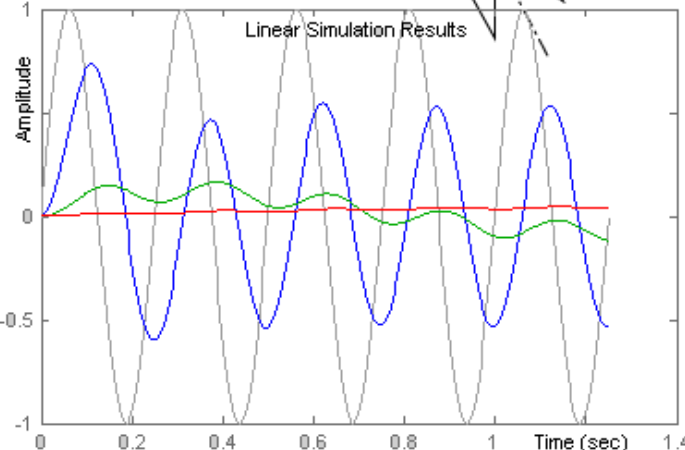
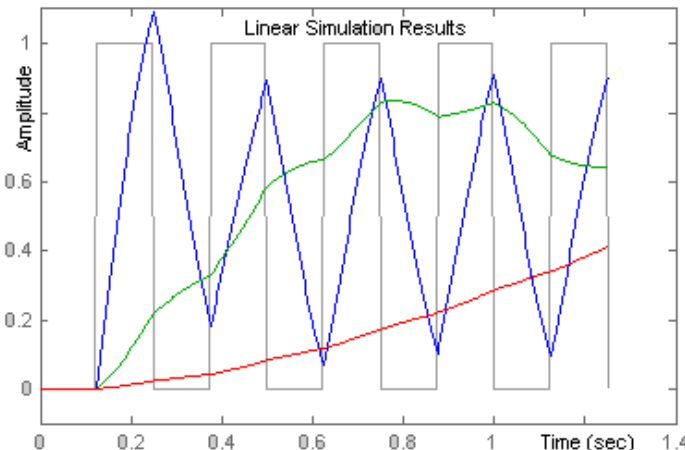
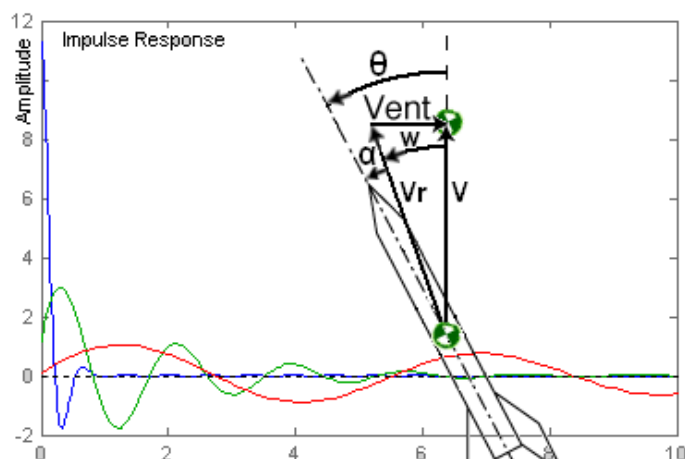
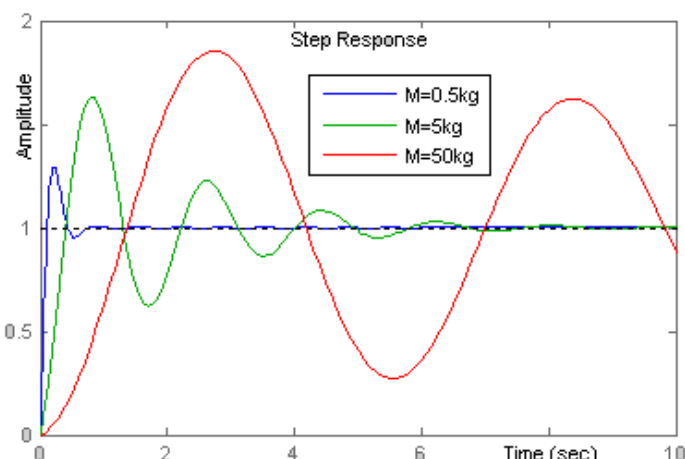
% Création du système sous forme de fonction de transfert
% Par Transformée de Laplace en p :
% THETA(p) * (I*p^2+C2*p+C1) = WIND(p) * (C2*p+C1)
% La fonction de transfert de 'Wind' vers 'Theta' est donc :
% THETA(p)/WIND(p) = (C2*p+C1) / (I*p^2+C2*p+C1)

p = tf('p');
Sys = (C2*p+C1) / (I*p^2+C2*p+C1);









[w0_zeta_] = damp(Sys); % rad/s, pulsations & coefs d'amortissements
f0_w0_/(2*pi); % Hz, fréquences propres
T0_2*pi./w0_; % s, périodes propres
lambda_=V*T0_; % m, longueurs d'ondes

% Réponse temporelle :
tfin=10;%s, temps final
figure(1),step(Sys,tfin) % vent météo constant (i en sortie de rampe)
figure(2),impz(Sys,tfin) % rafale de vent momentanée
[u,t]=gensig('square',1/4); % perturbation à 4Hz
figure(3),lsim(Sys,u,t),ylim([-1 1.1]) % vent qqe défini par u(t)
[u,t]=gensig('sine',1/4); % perturbation à 4Hz
figure(4),lsim(Sys,u,t) % vent qqe défini par u(t)

```



# Chapitre 5 : Calcul pas-à-pas de la trajectoire.

- [Chapitre 1 - Généralités sur le vol de la fusée.](#) 
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#) 
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#) 
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#) 
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#) 
  - [5.0. Principe du calcul pas à pas.](#)
  - [5.1. Cas du vol vertical 1D - Z](#)
  - [5.2. Cas du vol oblique 2D - X Z](#)
  - [5.3. Cas du vol oblique 3D - X Y Z](#)
  - [5.4. Descente sous parachute, avec vent.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#) 
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#) 
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#) 
- [Annexes.](#)



## 5.0. Principe du calcul pas à pas.

### Cinématique du point

Dans le cas d'un vol vertical, le but du "jeu" consiste à essayer de déterminer à tout moment la valeur de l'accélération  $\gamma(t)$ .

La connaissance de  $\gamma(t)$  permet de calculer la vitesse  $v(t)$  de l'engin puis son altitude  $z(t)$ .

En effet, l'accélération est, par définition, la variation de vitesse par unité de temps.

Par exemple, un objet à l'arrêt soumis à une accélération de  $1 \text{ m/s}^2$  aura une vitesse de  $1 \text{ m/s}$  après un temps de 1 seconde, de  $2 \text{ m/s}$  après un temps de 2 secondes, ...

De même, la vitesse  $v(t)$  permet de calculer l'altitude  $z(t)$  puisqu'elle correspond à la variation d'altitude par unité de temps.

Connaissant les forces appliquées à la fusée et sa masse, il est possible de calculer l'accélération à un instant donné :

$$\text{donné : } \gamma(t) = \frac{\sum F_{\text{ext}}}{M}$$

On en déduit la vitesse instantanée :  $v(t) = \int_0^t \gamma(t) . dt$  puis la distance parcourue :  $z(t) = \int_0^t v(t) . dt$

Durant tout le vol de la fusée, les paramètres et les grandeurs varient (Poussée P, Traînée R, accélération  $\gamma$ , Masse M ...), il conviendrait donc d'utiliser ces intégrations continues.

Néanmoins, à un instant donné du vol, ces paramètres peuvent être considérés comme constant, et en particulier l'accélération.

Dans ce cas, et sur une durée  $dt$  limitée, on a un mouvement uniformément accéléré, et ces équations s'expriment alors :

$$\gamma = \text{Constante}$$

$$v(t) = \gamma . dt + v_0$$

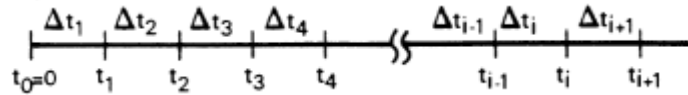
$$x(t) = \frac{1}{2} . \gamma . dt^2 + v_0 . dt + x_0$$

## Méthode de calcul pas à pas

Pour pouvoir utiliser ces calculs simplifiés, il faut considérer le mouvement durant des instants  $dt$  suffisamment petits pour que les grandeurs  $P$ ,  $R$ ,  $\gamma$ ,  $M$ ... puissent être prises comme constantes au cours de l'intervalle de temps  $dt$ . Ce dernier est appelé "pas" du calcul.

A partir des valeurs du pas précédent ( $T_{i-1}$ ), on calcule alors l'accélération, la vitesse et la position à la fin du pas courant ( $T_i$ ).

On effectue ainsi successivement les calculs à partir de la date origine  $t_0=0$  jusqu'à la fin de la phase du mouvement considéré.



Plusieurs pas de calculs  $dt$  différents peuvent être pris pour différentes phases de vol, ou pour suivre l'évolution des grandeurs (en aucun cas la variation de l'accélération  $\gamma$  ne doit dépasser 10% de sa valeur entre 2 pas).

## 5.1. Cas du vol vertical 1D - Z

Pour simplifier les calculs, nous considérerons un lancement vertical avec vent nul.

Le problème se limite à une seule dimension, l'altitude. Si on appelle  $z$  l'axe des altitudes orienté du bas vers le haut,  $P$  la poussée du moteur et  $R$  la résistance de l'air, l'équation du mouvement permet d'écrire :

$M \cdot \gamma = P - M \cdot g - R$  pour la phase ascendante (le poids et la résistance de l'air s'opposent au mouvement d'ascension)

$M \cdot \gamma = -M \cdot g + R$  pour la phase descendante (la résistance de l'air s'oppose à la chute de l'engin)

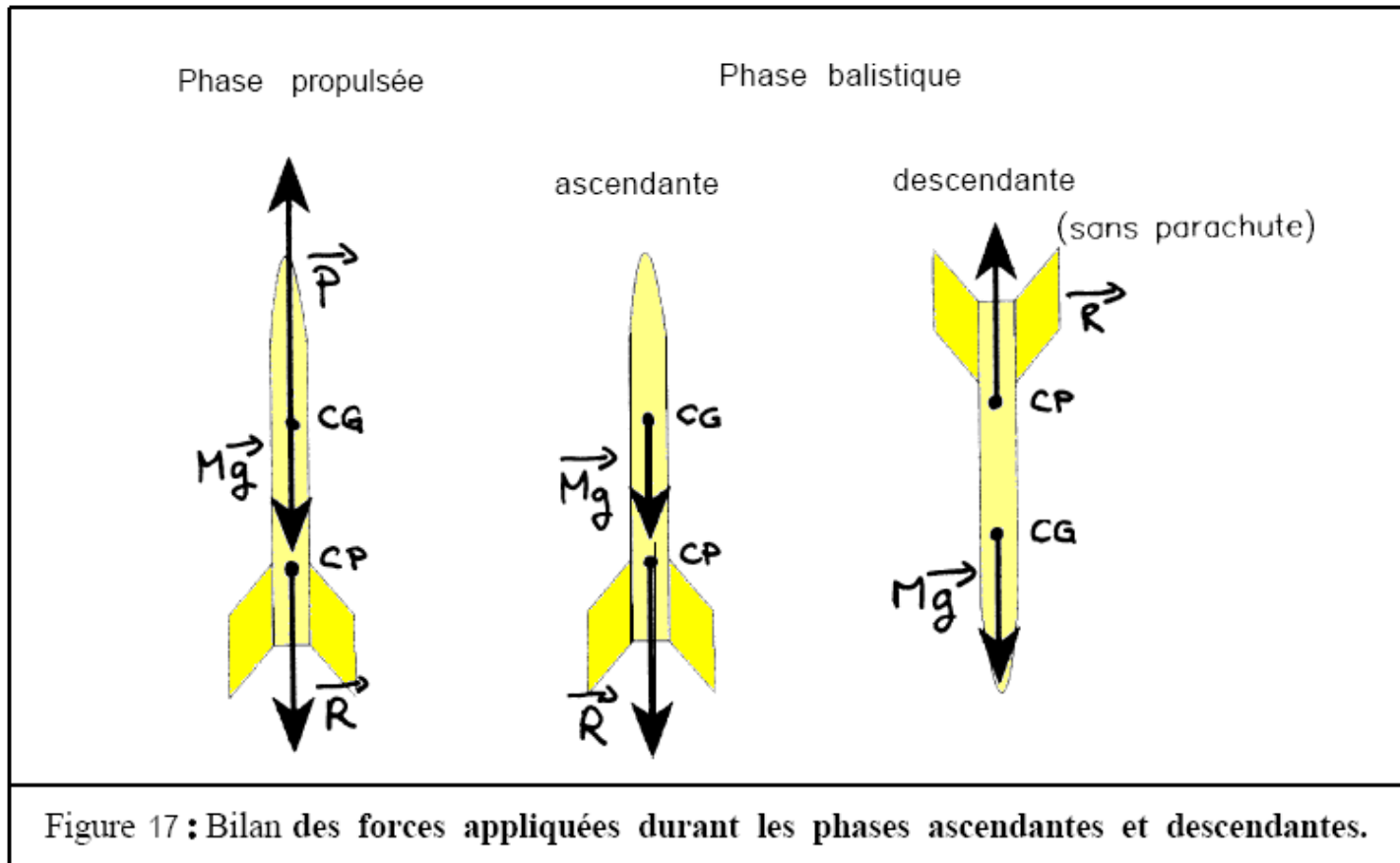


Figure 17 : Bilan des forces appliquées durant les phases ascendantes et descendantes.

En tenant compte de la loi d'évolution des différents paramètres, on a à l'instant  $t_i$  pour la phase ascendante :

$$M_i = M_0 - dm/dt \cdot t_i$$

$$\gamma_i = (P_i - R_{i-1}) / M_i - g$$

$$v_i = v_{i-1} + \gamma_i \cdot \Delta t_i$$

$$z_i = z_{i-1} + v_i \cdot \Delta t_i + \frac{1}{2} \cdot \gamma_i \cdot (\Delta t_i)^2$$

$$R_i = \frac{1}{2} \cdot \rho_i \cdot S \cdot C_x \cdot v_i^2$$

Pour pouvoir appliquer ces formules, il faut déterminer les valeurs de la poussée  $P_i$ , de la masse volumique de l'air  $\rho_i$  et du coefficient de traînée  $C_x$ . La valeur poussée est obtenue simplement à partir de la courbe de poussée du propulseur utilisé. Pour la masse volumique de l'air  $\rho_i$ , la consultation de tables standards de l'atmosphère peut s'avérer très utile. Il est également possible d'utiliser les formules approchées donnant la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude. La détermination de  $C_x$  est la plus délicate à cause du manque de modèle d'évolution de ce paramètre (cf. annexe [aéro](#)).

Par itération (il est assez facile de programmer ces équations sur son ordinateur), on peut donc déterminer l'altitude jusqu'à la culmination pour laquelle la vitesse s'annule.

La phase descendante se traite de la même façon, à la différence que la direction de la résistance de l'air s'inverse.

L'enchaînement des calculs peut se représenter sur la figure suivante :

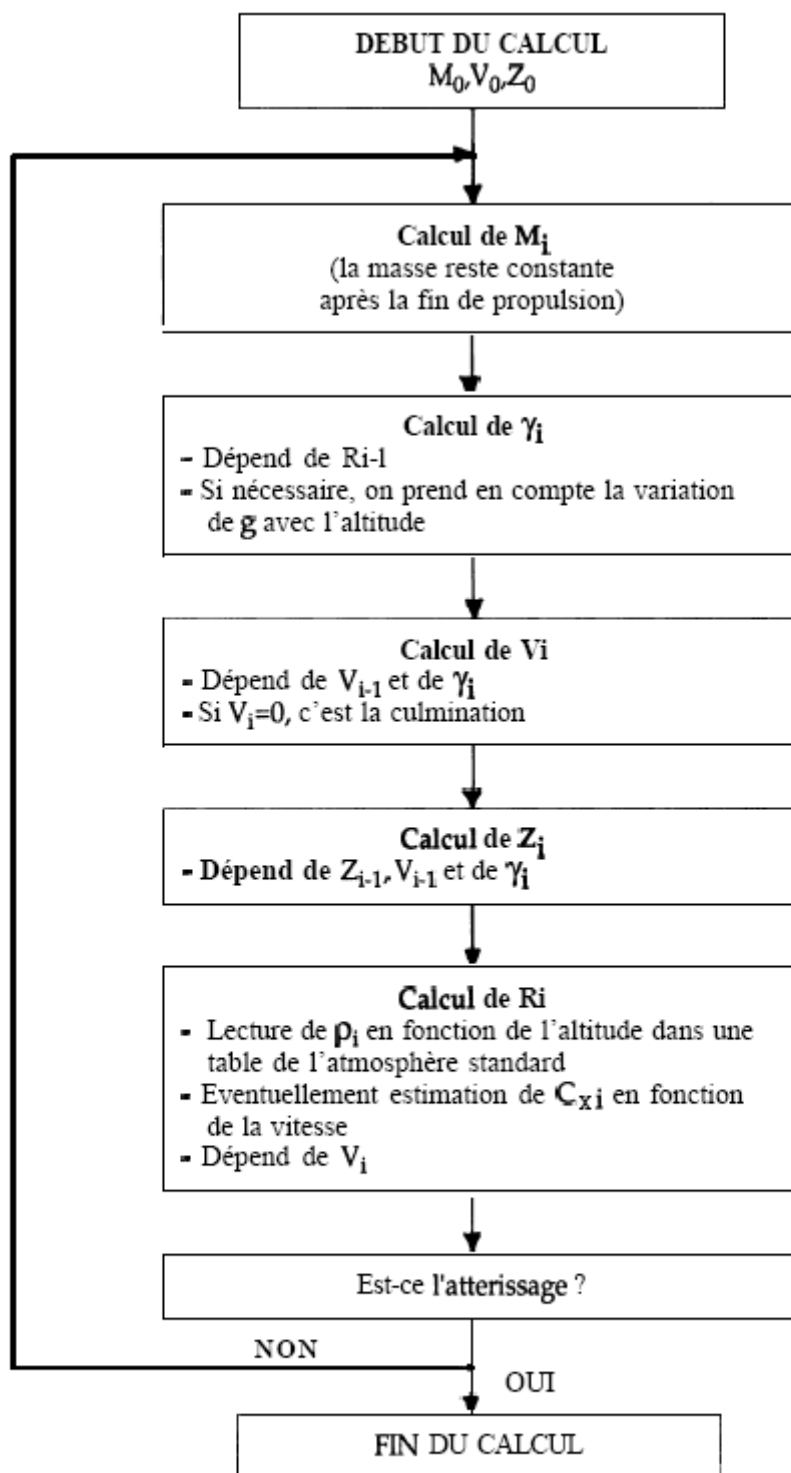
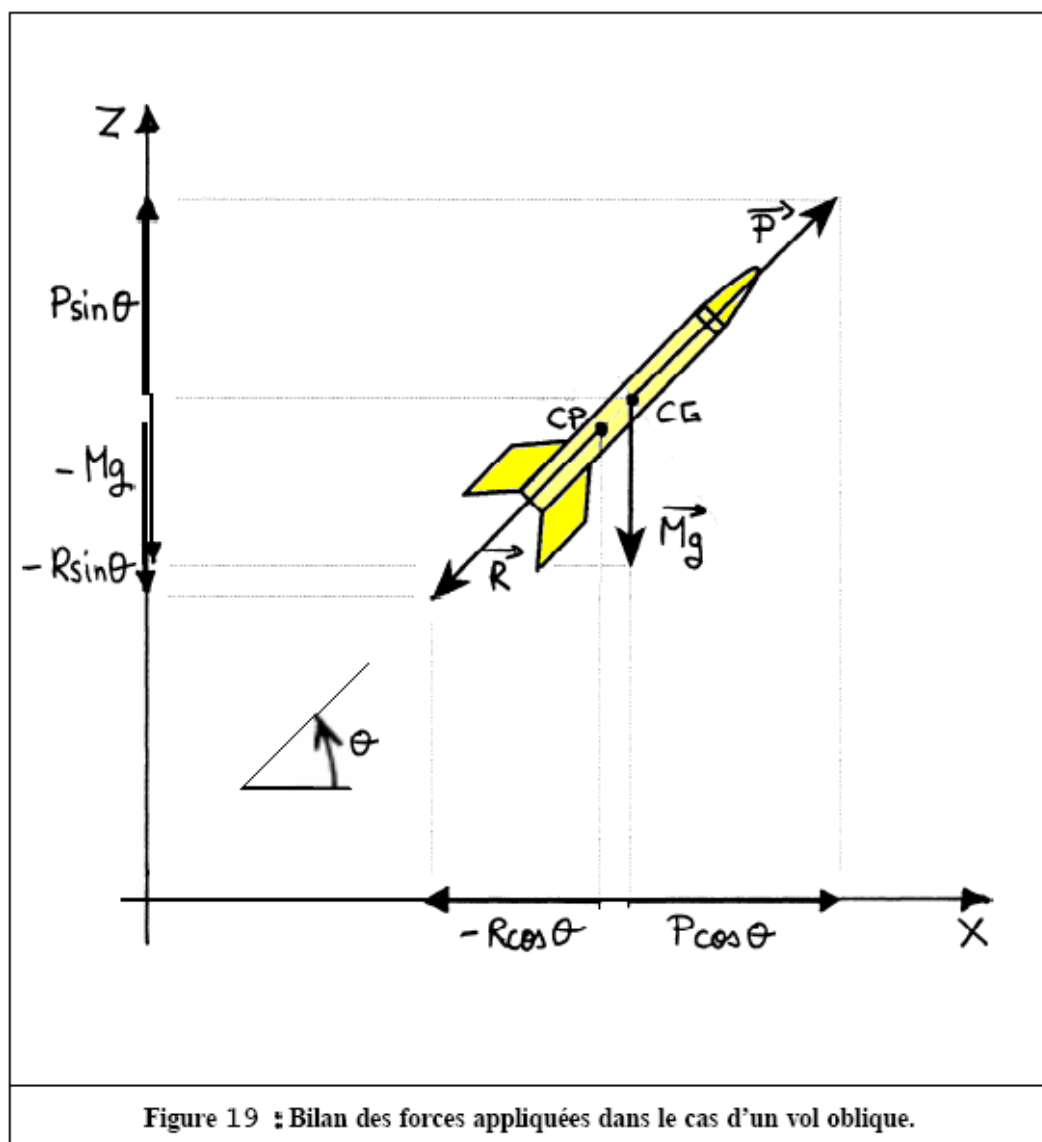


Figure 18 : Déroulement du calcul en pas-à-pas pour un vol vertical.

## 5.2. Cas du vol oblique 2D - X Z

Le calcul du vol oblique est un peu plus compliqué car il faut considérer les déplacements horizontaux (portée ou axe X) et verticaux (altitude ou axe Z) de la fusée et traiter de manière spécifique la période pendant laquelle la fusée est dans la rampe de lancement. Les forces appliquées sont représentées sur la figure 19. Là encore, on considère un vol sans vent et sans incidence, l'axe longitudinal de la fusée étant à tout moment parallèle à la trajectoire.

Par rapport au cas du vol vertical, on fait intervenir une nouvelle variable appelée ASSIETTE et notée  $\theta$  qui est l'angle que fait l'axe longitudinal de la fusée avec l'horizontale. C'est donc selon cet angle  $\theta$  que s'appliquent la poussée et la traînée.



En décomposant les différentes forces sur les deux axes X et Z de portée et d'altitude, on obtient les relations suivantes :

$$P_x = P \cdot \cos(\theta)$$

$$R_x = -R \cdot \cos(\theta)$$

$$P_z = P \cdot \sin(\theta)$$

$$\text{Poids}_z = -M \cdot g$$

$$R_z = -R \cdot \sin(\theta)$$

D'où les accélérations  $\gamma_x$  et  $\gamma_z$  respectivement sur les axes de portée et d'altitude :

$$\gamma_x = ((P - R) / M) \cdot \cos(\theta)$$

$$\gamma_z = ((P - R) / M) \cdot \sin(\theta) - g$$

Ces équations sont valables pour la phase ascendante. Après culmination, il faut inverser la direction de R.

Le calcul d'un pas s'effectue de façon similaire au cas du vol vertical :

$$M_i = M_0 - dm \cdot t_i$$

$$R_i = \frac{1}{2} \rho_i \cdot C_{Ai} \cdot S(V_{i-1})^2$$

$$(\gamma_x)_i = \frac{P_i - R_i}{M_i} \cdot \cos(\theta_{i-1})$$

$$(\gamma_z)_i = \frac{P_i - R_i}{M_i} \cdot \sin(\theta_{i-1}) - g$$

$$\begin{cases} (v_x)_i = (v_x)_{i-1} + (\gamma_x)_i \cdot \Delta t_i \\ (v_z)_i = (v_z)_{i-1} + (\gamma_z)_i \cdot \Delta t_i \end{cases}$$

d'où

$$v_i = \sqrt{((v_x)_i)^2 + ((v_z)_i)^2}$$

$$\begin{cases} X_i = X_{i-1} + (v_x)_{i-1} \Delta t_i + \frac{1}{2} (\gamma_x)_i \cdot (\Delta t_i)^2 \\ Z_i = Z_{i-1} + (v_z)_{i-1} \Delta t_i + \frac{1}{2} (\gamma_z)_i \cdot (\Delta t_i)^2 \end{cases}$$

Pour les deux dernières lignes, la formule suivante est plus rapide à calculer :

$$\begin{cases} X_i = X_{i-1} + \frac{1}{2} ((v_x)_{i-1} + (v_x)_i) \cdot \Delta t_i \\ Z_i = Z_{i-1} + \frac{1}{2} ((v_z)_{i-1} + (v_z)_i) \cdot \Delta t_i \end{cases}$$

Pour le pas suivant on prend alors  $\theta_i$  défini par :

$$\sin \theta_i = \frac{(v_z)_i}{v_i}$$

$$\cos \theta_i = \frac{(v_x)_i}{v_i}$$

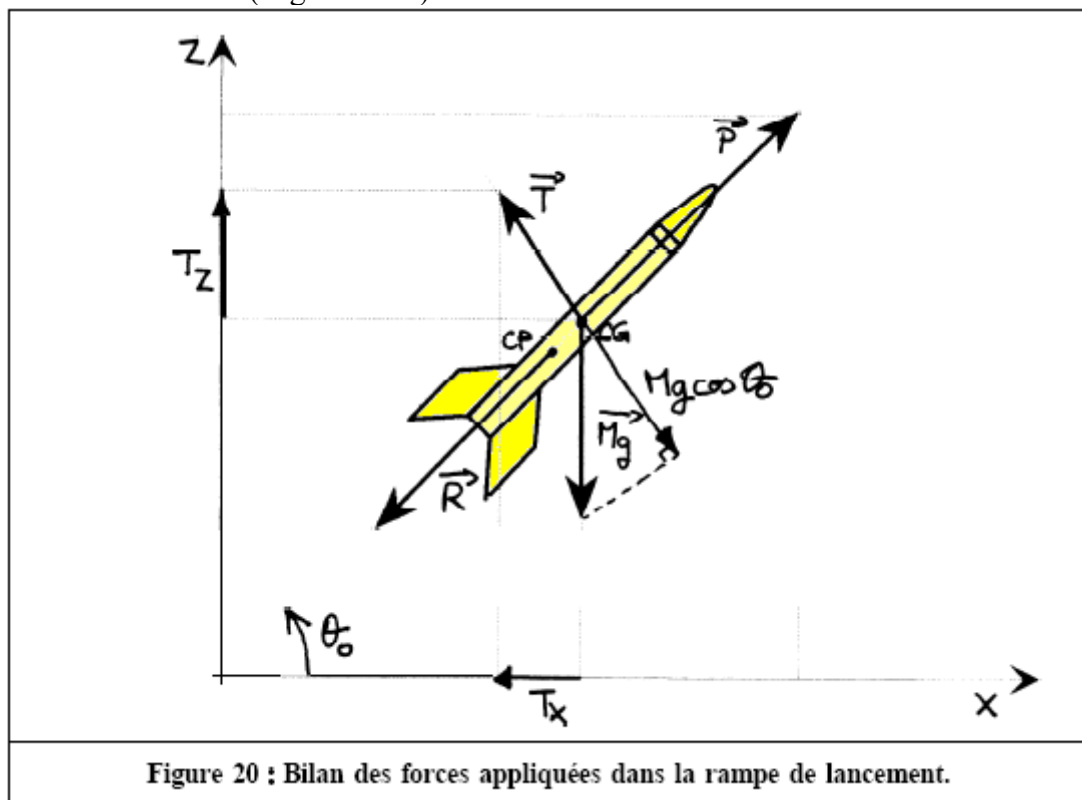
ou encore :

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{(v_z)_i}{(v_x)_i}$$

La culmination se produit lorsque la composante verticale de la vitesse change de signe.



Par ailleurs, durant la période où la fusée est sur la rampe de lancement, s'exerce en plus la réaction  $T$  de la rampe opposée à la composante du poids normale à la fusée (voir la figure 20).  $\theta_0$  est l'angle que fait la rampe de lancement avec l'horizontale (angle de site).



Pendant cette phase où la fusée est maintenue dans l'axe de la rampe, on a :

$$(\gamma_X)_i = \frac{P_i - R_i}{M_i} \cdot \cos\theta_i - g \cdot \sin\theta_i \cdot \cos\theta_i$$

$$(\gamma_Z)_i = \frac{P_i - R_i}{M_i} \cdot \sin\theta_i - g + g \cdot \cos(\theta_i)^2$$

et  $\theta_i = \theta_0$ .

On ne tient plus compte de la rampe de lancement lorsque l'altitude  $Z_i - Z_0$  devient supérieure à  $L \cdot \sin(\theta_0)$  ( $L$  étant la longueur de la rampe de lancement).

Enfin, pour en finir avec les précisions : pendant les premiers pas de calculs, il se peut que la poussée soit insuffisante pour soulever la fusée. Auquel cas, il faudra éviter que la fusée ne tombe en l'immobilisant en rampe (réaction du culot de la rampe).

En résumé, l'enchaînement des calculs pour un vol oblique peut se représenter sur la figure suivante :

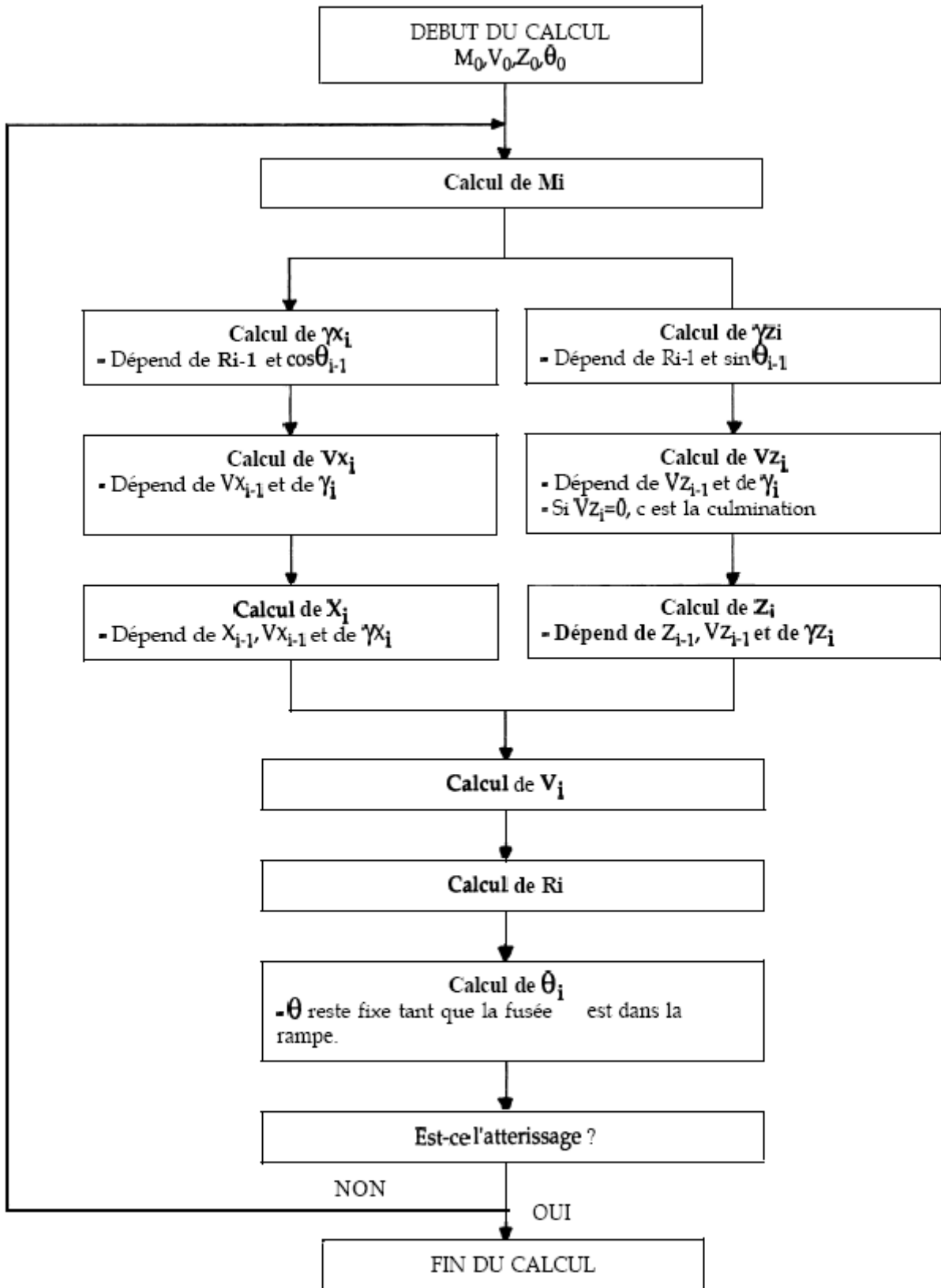


Figure 21: Déroulement du calcul en pas-à-pas pour un vol oblique.

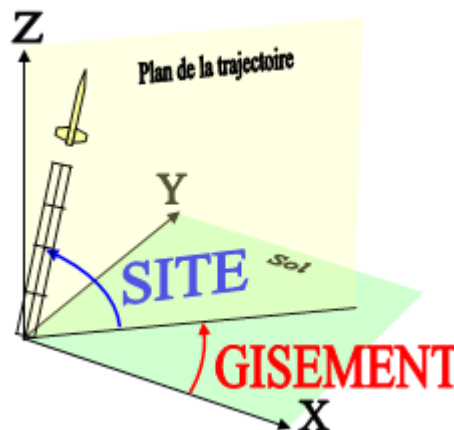
### 5.3. Cas du vol oblique 3D - X Y Z

Le calcul du vol oblique 3D est une petite extension du vol oblique 2D en considérant les déplacements dans les 3 axes X Y Z d'un repère sol. Là encore, on considère un vol sans vent et sans incidence, l'axe longitudinal de la fusée étant à tout moment parallèle à la trajectoire.

Pour définir l'orientation de la rampe de lancement, on fait intervenir 2 angles : le Site et le Gisement.

Notons que la trajectoire de la fusée restera dans le "plan de la trajectoire" défini par le gisement, puisque toutes les forces s'expriment dans ce plan. On peut définir l'assiette de la fusée dans ce plan (assiette initiale = site de la rampe)

Ce mode de calcul peut permettre d'aligner les axes X et Y avec l'Est et le Nord, ou bien peut servir à calculer le déport transverse (hors plan trajectoire) lors de la descente sous parachute avec vent transverse (cf. § ci-dessous).



Trajec 2.x utilise cette modélisation 3D comme algorithme de trajectographie. A titre d'exemple, voici la boucle de calcul principale de Trajec 2.x :

```

ti = ti-1 + dt ; // dt : pas de calcul, constant
mi = mi-1 - dm ; // dm : perte de masse par pas de calcul, constant
Pi = poussée moyenne entre ti-1 et ti
Fri = (Pi - 1/2.ρ(zi-1).S.Cx(Vi-1).Vi-12) . cos(Assiettei-1) ; // somme des forces horizontales
Fzi = (Pi - 1/2.ρ(zi-1).S.Cx(Vi-1).Vi-12) . sin(Assiettei-1) - mi.g ; // somme des forces verticales
si en_rampe : Fri = Fri - mi.g . cos(Assiettei-1) . sin(Assiettei-1) ;
si en_rampe : Fzi = Fzi + mi.g . cos(Assiettei-1) . cos(Assiettei-1) ;
Gri = Fri / mi ; // accélération horizontale
Gzi = Fzi / mi ; // accélération verticale
Vri = Vri-1 + Gri.dt ; // vitesse horizontale
Vzi = Vzi-1 + Gzi.dt ; // vitesse verticale
Vi = sqrt(Vri2 + Vzi2) ; // vitesse totale
Xi = Xi-1 + (Vri.dt + Gri.dt2/2) . cos(Gisement) ; // position selon X
Yi = Yi-1 + (Vri.dt + Gri.dt2/2) . sin(Gisement) ; // position selon Y
Zi = Zi-1 + Vzi.dt + Gzi.dt2/2 ; // position selon Z
si hors_rampe : Assiettei = arctan(Vzi / Vri) ;

```

## 5.4. Descente sous parachute, avec vent.

A partir de l'instant où le parachute est éjecté, on considère qu'il s'est complètement déployé, et que la fusée a instantanément atteint sa vitesse limite sous parachute.

La vitesse verticale vaut la vitesse limite jusqu'à toucher le sol.

S'il n'y a pas de vent, les vitesses horizontales sont nulles.











S'il y a du vent latéral, la fusée sous parachute se fait emporter par le vent (dérive), les vitesses horizontales sont égales à celles du vent.

Cette fonctionnalité, présente dans Trajec 2.x, permet d'estimer la dérive de la fusée jusqu'au point d'atterrissage sous parachute en cas de vent.

Notons qu'il est facile de calculer le déport analytiquement : déport = "altitude d'ouverture du parachute" \* "vitesse du vent" / "vitesse sous parachute".

Pour dimensionner la taille du parachute ou calculer la vitesse limite de descente, cf. la fin de l'annexe sur les [forces aéro](#).

# Chapitre 6 : Méthodes d'intégration numérique.

- [Chapitre 1 - Généralités sur le vol de la fusée.](#) 
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#) 
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#) 
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#) 
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#) 
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)   
- [6.1. Notions et terminologie.](#)
- [6.2. Différentes méthodes.](#)
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#) 
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#) 
- [Annexes.](#)



Il s'agit d'introduire les algorithmes mathématiques que l'on utilise pour résoudre les équations de mouvement, tel le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) :  $\sum F_{ext} = M \cdot \ddot{x}$

Référence bibliographique : *Objets autonomes en simulation physique temps-réel* - Thèse de Jérémie Dequidt - 2005

## 6.1. Notions et terminologie.

### Équation Différentielle Ordinaire (EDO)

Les modèles mécaniques, quel que soit leur complexité, établissent une équation qui fait intervenir la **position**, la **vitesse**, l'**accélération** des différents degrés de liberté (translation et rotation du Centre de Gravité).

Mathématiquement, cette équation peut être généralisée sous la forme suivante :  $M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = F$

Elle est qualifiée d'Équation Différentielle Ordinaire (EDO) du second ordre :

- différentielle : par la présence des dérivées temporelles de la position de degrés de libertés (notée  $x$ ).
- ordinaire : car on ne fait pas intervenir de dérivées partielles.
- du second ordre : la position  $x$  est différenciée au maximum deux fois.

### Système d'équation et Vecteur d'état

La résolution d'EDO du 2nd ordre passe souvent par une mise sous forme d'un système d'EDO du 1er ordre.

A partir d'une équation du type  $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ , on se ramène au système  $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(t, x, v) \end{cases}$  (où  $v$  représente la **vitesse**).

En utilisant le vecteur d'état  $V = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$ , le système d'équation s'écrit :  $\frac{dV}{dt} = f(t, V)$

L'objectif est de trouver  $V(t)$ , c'est à dire d'intégrer  $\frac{dV}{dt} = f(t, V)$

## Problème aux valeurs initiales

Résoudre l'équation  $\frac{dV}{dt} = f(t, V)$  nécessite la connaissance de la valeur initiale du vecteur d'état

(vitesse initiale et position initiale). On parle de problème aux valeurs initiales, ou problème de Cauchy. Malgré cela, on ne sait intégrer analytiquement qu'un très petit nombre d'EDO non linéaires. Il faut alors considérer les méthodes de résolution numérique.

## Principe de l'intégration numérique (méthode pas à pas)

On cherche à connaître les positions à l'instant  $t + \Delta t$  à partir des positions, vitesses, accélérations à l'instant  $t$  ( $\Delta t$  représentant ici le pas d'intégration numérique).

Mathématiquement, une méthode numérique donne une solution  $\tilde{V}(t)$  qui approche la solution exacte  $V(t)$ , ceci répété pour des instants successifs.

## Développement en série de Taylor

Afin de déterminer les positions à l'instant  $t_0 + \Delta t$  (ou  $t_0 + h$ ), il est possible de déterminer une estimation de la fonction  $x(t)$  autour de l'instant  $t_0$ .

Le développement en série de Taylor limité à l'ordre 2 d'une fonction  $y(t)$  autour du point  $y(t_0)$  permet cela :

$$y(t) \approx y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{y''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2$$

En posant  $t - t_0 = h$ , nous obtenons

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + y'(t_0)h + \frac{y''(t_0)}{2!}h^2$$

Puisque l'erreur du développement de Taylor est petite si la quantité  $h$  est petite, les méthodes d'intégration numériques décomposent l'intervalle de calcul en petits pas d'intégration, et développent une méthode itérative (pas à pas). Néanmoins, les petites erreurs résiduelles s'accumulent à chaque pas.

Beaucoup de méthode itératives utilisent l'approximation linéaire de la fonction, c'est à dire que l'approximation  $\hat{y}(t_{n+1})$  de la vraie solution  $y(t_{n+1})$  est calculée sur la base des 2 premiers termes du

développement de Taylor (limité à l'ordre 1) autour de  $\hat{y}(t_n)$ . Cf. la méthode d'Euler ci-dessous. C'est aussi la

formule de la tangente utilisée pour le calcul d'intégrales :  $y(t_0+h) = y(t_0) + y'(t_0)*h$ .

La méthode utilisée par Trajec utilise en revanche un développement d'ordre 2 (basé sur les 3 premiers termes).

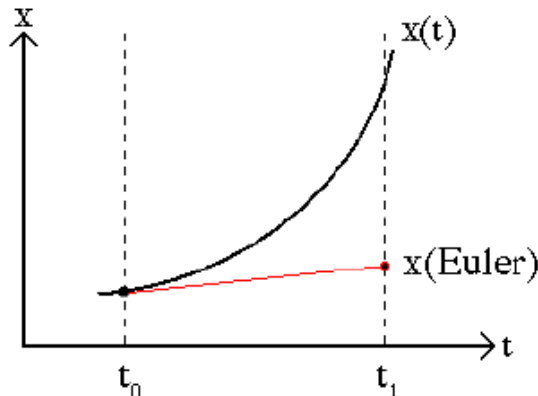
## 6.2. Différentes méthodes.

### Méthode Euler explicite

Mathématiquement :  $X(t_{n+1}) = X(t_n) + h(t_n) \times f(t_n, X(t_n))$

ou plus simplement :  $X_{n+1} = X_n + \Delta t \cdot \dot{X}_n$

Cette équation signifie que l'on calcule la tangente  $T_n$  au point  $(t_n, x(t_n))$  et que la valeur de  $x$  correspondant à l'abscisse  $x(t_{n+1})$  est l'intersection de  $T_n$  et de la droite d'abscisse  $x(t_{n+1})$ . L'expression de la tangente est obtenue par une évaluation de  $dx/dt$ , c'est à dire de la vitesse au point d'abscisse  $t_n$ . Le graphe de la figure suivante illustre la méthode explicite d'Euler :



Dans le cadre de la simulation mécanique interactive, avec la notion de vecteurs d'état, l'équation devient :

Écriture mathématique :  $\begin{pmatrix} x(t_{n+1}) \\ v(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_n) \\ v(t_n) \end{pmatrix} + h(t_n) \times \begin{pmatrix} v(t_n) \\ f(t_n, x(t_n), v(t_n)) \end{pmatrix}$

ou encore :  $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t \times v_n \\ v_{n+1} = v_n + \Delta t \times \gamma_n \end{cases}$  avec  $\gamma_n$  calculé à partir de  $t_n$ ,  $x_n$  et  $v_n$ .

### Méthode Euler modifiée

Cette variante de la méthode d'Euler consiste à calculer dans un premier temps  $v(t_{n+1})$  puis à utiliser ce résultat pour calculer  $x(t_{n+1})$ .

$$(1) v_{n+1} = v_n + \Delta t \times \gamma_n$$

$$(2) x_{n+1} = x_n + \Delta t \times v_{n+1}$$

L'ordre de calcul des 2 lignes devient important.

Cette variante garde la même complexité que la méthode d'Euler mais donne une précision meilleure que la version basique de l'intégration d'Euler.

### Méthode Trajec 2.x

Formellement, il s'agit d'une méthode d'intégration discrétisée où chaque étape de l'approximation de  $x(t_{n+1})$  est calculée sur la base des 3 premiers termes du développement de Taylor limité à l'ordre 2 autour de  $x(t_n)$  ; et qui utilise la vitesse du pas courant pour le calcul de la position courante (cf. Euler Modifiée).

$$(1) v_{n+1} = v_n + \Delta t \times \gamma_n$$

$$(2) x_{n+1} = x_n + \Delta t \times v_{n+1} + \frac{1}{2} \times \Delta t^2 \times \gamma_n$$

avec  $\gamma_n$  calculé à partir de  $t_n$  ( $x_n$  et  $v_n$ ) sauf pour la poussée (valeur moyenne entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ ) et sauf pour la masse ( $m_{n+1}$ ).

## Méthode Runge-Kutta d'ordre 2

Cette technique reprend l'approximation d'intégrales par la méthode des rectangles mais en utilisant la valeur de la fonction au milieu des intervalles au lieu d'un des bords (technique dite du point-milieu). Appliquée à la résolution d'équations différentielles, cette technique produit une équation de la forme :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h(t_n) f(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n + \frac{h}{2}))$$

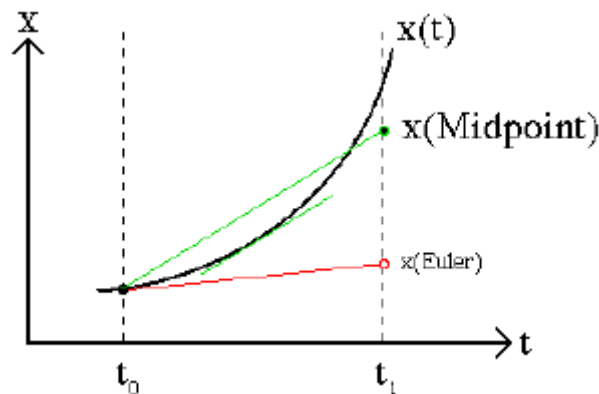
L'évaluation de la fonction au milieu du pas de temps se fait à l'aide de la méthode d'Euler explicite :

$$x_{t_n+h/2} \approx x_{t_n} + \Delta t / 2 \times \dot{x}_{t_n}$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x(t_n)) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h(t_n)}{2}, x_n + \frac{h(t_n)}{2} k_1) \\ x(t_{n+1}) &= x_n + h(t_n) k_2 \end{aligned}$$

Concrètement cela revient à corriger la valeur de la tangente en  $x(t_n)$  à l'aide d'une évaluation supplémentaire (voir la figure).



Dans le cadre de la simulation mécanique, cela donne :

$$k_1 = \begin{bmatrix} v_{t_n} \\ \gamma_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_n} \\ f(t_n; v_{t_n}; x_{t_n}) \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} v_{t_n+h/2} \\ \gamma_{t_n+h/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{t_n} + h/2 \times \gamma_{t_n} \\ f(t_n + h/2; v_{t_n} + h/2 \times \gamma_{t_n}; x_{t_n} + h/2 \times v_{t_n}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{t_n+h} \\ v_{t_n+h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t_n} \\ v_{t_n} \end{bmatrix} + h \times \begin{bmatrix} v_{t_n+h/2} \\ \gamma_{t_n+h/2} \end{bmatrix}$$

Cette méthode est qualifiée d'ordre 2 pour sa précision. Elle est plus coûteuse que les méthodes d'Euler car elle implique des évaluations supplémentaires de la fonction  $f$ , ce qui, en simulation mécanique, est particulièrement lourd (bilan de forces à effectuer). Mais l'erreur résiduelle accumulée à chaque pas est d'ordre plus élevée, donc plus petite qu'avec Euler (ordre 1).

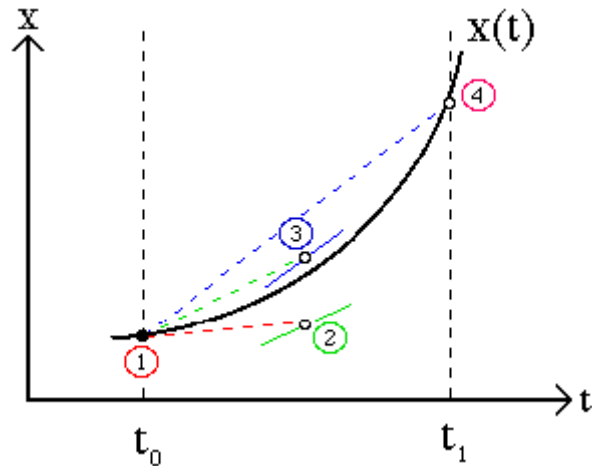


## Méthode Runge-Kutta d'ordre 4

Kutta a généralisé ce principe pour obtenir des méthodes d'ordre quelconque.

Dans la pratique, que ce soit en analyse numérique ou en simulation mécanique, on privilégie cette méthode d'ordre 4 (RK4) qui donne un bon compromis entre coût calculatoire et précision.

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, x(t_n)) \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{h(t_n)}{2}, x_n + \frac{h(t_n)}{2} k_1\right) \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{h(t_n)}{2}, x_n + \frac{h(t_n)}{2} k_2\right) \\k_4 &= f\left(t_n + h(t_n), x_n + h(t_n) k_3\right) \\x(t_{n+1}) &= x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$



## Autres méthodes

Méthode Runge-Kutta d'ordre 8

Méthode de Newmark

Méthodes à schéma implicite

Méthodes à pas multiples (Verlet & ADAMS)

Méthodes à pas variable

Méthodes prédictor-correcteur

# Chapitre 7 : Trajectographie dynamique.

- [Chapitre 1 - Généralités sur le vol de la fusée.](#)
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#)
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#)
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#)
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)
- **[Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#)**
  - [7.1. Simulateur dynamique 3DDL dans un plan - X Z  \$\theta\$](#)
  - [7.2. Simulateur dynamique 6DDL - X Y Z  \$\theta \psi \varphi\$](#)
  - [7.3. Incidence en sortie de rampe.](#)
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#)
- [Annexes.](#)



Il fut un temps où les calculatrices n'avaient pas la puissance qu'elles ont maintenant. A cette époque (1970), les temps de culmination et les portées balistiques étaient donnés par des abaques. Dans les années 1980 les calculatrices programmables purent enfin accueillir des programmes de trajectographie.

Le plus souvent ces programmes considèrent la fusée comme un point matériel et supposent que la trajectoire se déroule à incidence nulle et dans un plan. Cette approximation peut s'illustrer à l'aide de la figure ci-contre.



On peut cependant augmenter la pertinence de ce type d'algorithme en considérant la rotation de la fusée autour de son CdM, ainsi que le vent.

Pour cela, il faut introduire les coefficients C1 et C2 et l'inertie [cf. §4.], puis calculer l'angle d'assiette et l'angle d'attaque au cours du temps.

Rappelons qu'il ne faut pas prendre en compte la valeur théorique de l'amortissement par mouvement transverse du CdM dans la valeur de C2.

Le simulateur ainsi produit permet d'observer les oscillations du comportement dynamique de la fusée.

En effectuant plusieurs simulations avec des vents différents, il est possible de valider les caractéristiques de stabilité dynamique de la fusée.

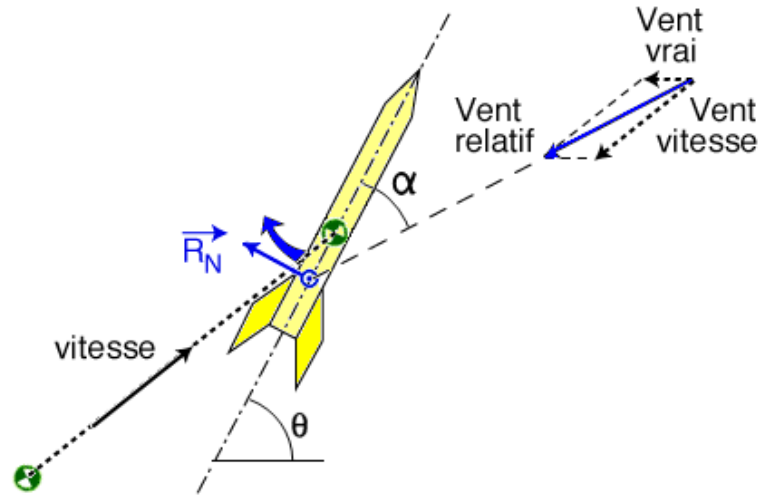
Ce simulateur permet également de mettre en évidence le phénomène de surstabilité ("girouettage").

Le logiciel "RockSim" contient un simulateur dynamique dans un plan tel que décrit ci-dessous.

Références bibliographiques de ce chapitre : *Design of Aerodynamically Stabilized Free Rockets* p160 §4.5 en [biblio](#) ; documentation de *Matlab Aerospace Blockset*, notamment les blocs [3DoF](#), [6DoF](#), [Euler/Quaternions to DCM](#).

## 7.1. Simulateur dynamique 3DDL dans un plan - X Z $\theta$

Il s'agit d'introduire les étapes de calculs suivantes dans la boucle de calcul principale de type vol oblique 2D. L'assiette  $\theta$  qui était supposée alignée avec la vitesse est maintenant calculée dynamiquement.



Moment\_d'inertie<sub>i</sub> = en fonction de la masse

Alpha<sub>i</sub> = Assiette<sub>i-1</sub> - arctan(Vz/(Vr+Vmeteo)) ;

DAAlpha<sub>i</sub> = Alpha<sub>i</sub> - Alpha<sub>i-1</sub> ; // Delta Alpha

Moment<sub>i</sub> = - C1 . Alpha<sub>i</sub> - C2 . DAAlpha<sub>i</sub> / dt

Accélération\_en\_rotation<sub>i</sub> = Moment<sub>i</sub> / Inertie<sub>i</sub>

Vitesse\_en\_rotation<sub>i</sub> = Vitesse\_en\_rotation<sub>i-1</sub> + Accélération\_en\_rotation<sub>i</sub> . dt ;

Assiette<sub>i</sub> = Assiette<sub>i-1</sub> + Vitesse\_en\_rotation<sub>i</sub> . dt ;

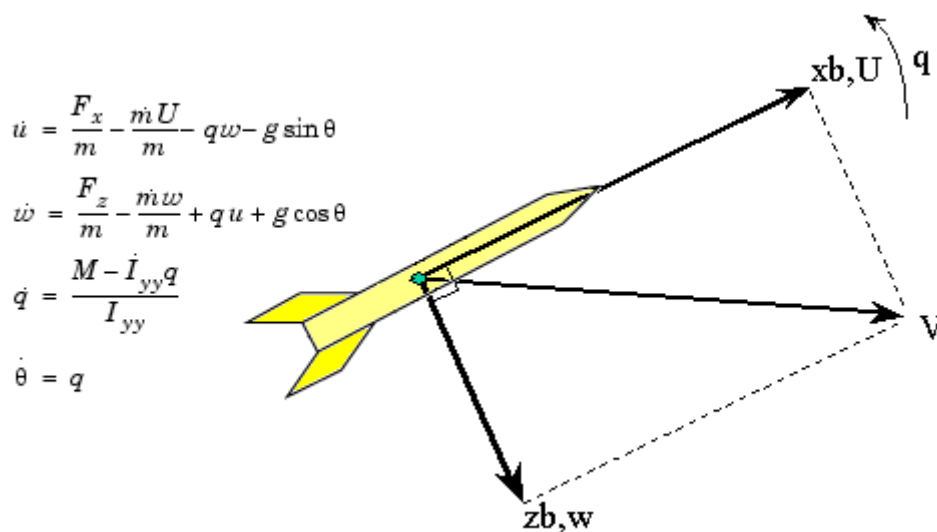
De plus, il ne faut pas oublier d'introduire la force normale dans le calcul de l'accélération en translation, sinon l'amortissement dû au déplacement latéral du centre de masse n'apparaîtra pas.

En outre, et c'est là que ce type de simulateur prend tout son intérêt, il est possible d'introduire un calcul des coefficients aérodynamiques Cn<sub>ai</sub> et de la position du CPA en fonction de l'incidence et du nombre de Mach, si on dispose de données ou de modèles adaptés.

Notons qu'il existe une autre méthode, où les équations de la dynamique sont écrites en axe fusée ( $x_b, z_b$ ).

Une conséquence est l'apparition des termes  $-q.w$  et  $+q.u$  liés à l'accélération angulaire du repère fusée (repère non-inertiel).

Il faut aussi tenir compte de la variation de la masse et de l'inertie. Voici un exemple avec ces 2 aspects :



## 7.2. Simulateur dynamique 6DDL - X Y Z φ θ ψ

Afin d'affiner encore plus le modèle, il est possible de simuler tous les Degrés De Libertés de la fusée : les 3 translations et les 3 rotations (6 DDL).

Ceci est nécessaire uniquement si on souhaite étudier des effets transverses au plan de la trajectoire, tel que l'effet du roulis (stabilité gyroscopique), ou l'effet d'un vent transverse.

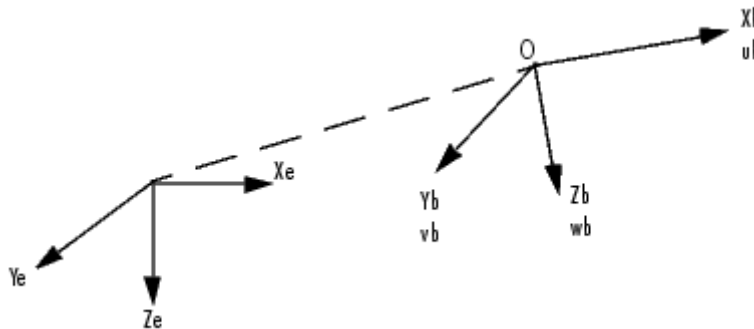
Sinon, l'utilisation d'un simulateur dynamique 3DDL dans un plan est beaucoup plus pertinente (cf. § précédent §7.1).

La mise en place d'un modèle 6DDL est formellement beaucoup plus lourde, et fait souvent appel à des notions plus avancées (niveau post-BAC). Elle n'est pas particulièrement conseillée aux amateurs. Vous voilà avertis.

### Équations de mouvement

Voici quelques indications d'une méthode où les équations de la dynamique sont écrites en axe fusée, et avec prise en compte de la variation de masse.

On considère le mouvement (translation et rotation) du repère fusée ("Body"), repère d'axes ( $X_b, Y_b, Z_b$ ) et d'origine le CdG de la fusée, par rapport à un repère fixe lié à la Terre ("Earth"), d'axes ( $X_e, Y_e, Z_e$ ) et d'origine la rampe de lancement. La fusée est considérée rigide, et le repère Terre est considéré inertiel.



L'équation de mouvement en translation du repère fusée est la suivante :

$$\underline{E}_b = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m(\dot{\underline{V}}_b + \underline{\omega} \times \underline{V}_b) + \dot{m} \underline{V}_b \quad , \quad \underline{V}_b = \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{bmatrix}, \quad \underline{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \underline{\omega} \times \underline{V}_b = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{bmatrix}$$

L'équation de mouvement en rotation du repère fusée est la suivante :

$$\underline{M}_B = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = I \dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times (I \underline{\omega}) + \dot{I} \underline{\omega} \quad , \quad I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad \underline{\omega} \times (I \underline{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \cdot I \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

où  $\times$  représente le produit vectoriel entre 2 vecteurs ("cross-product").

Ces termes supplémentaires liés à la rotation du repère fusée sont à l'origine du couplage gyroscopique.

Notons également les derniers termes, liés à la variation de masse et d'inertie.

La matrice d'inertie, ou "tenseur d'inertie", peut être approximée par sa diagonale si on ne dispose pas des inerties croisées.

## Démarche

Commençons par le calcul des Forces et des Couples qui s'appliquent à la fusée :

La Poussée et les Forces Aéro sont données en repère fusée, notons juste qu'il faut décomposer l'angle d'attaque total en incidence  $\alpha$  et dérapage  $\beta$ .

La Gravité et le Vent météo sont exprimés en repère Terre, il est nécessaire de faire un changement de repère (cf. § suivant).

On peut alors calculer les vecteurs d'accéléérations  $dV_b/dt$  et  $d\omega/dt$  :

$$(dV_b/dt) = \text{Forces} / \text{masse}$$

$$(d\omega/dt) = I^{-1} \cdot \text{Moments} = \text{inv}(I) \cdot \text{Moments}$$

Ensuite on intègre  $V_b$  et  $\omega$  par approximation linéaire (ou autre, cf. §6.) :

$$V_b = V_b + (dV_b/dt) \cdot dt \quad \text{incrément du vecteur vitesse}$$

$$\omega = \omega + (d\omega/dt) \cdot dt \quad \text{incrément du vecteur rotation}$$

La suite consiste à exprimer le vecteur vitesse de la fusée dans le repère Terre (cf. § suivant), puis en l'intégrant, à obtenir les Positions X Y Z par rapport à la rampe.

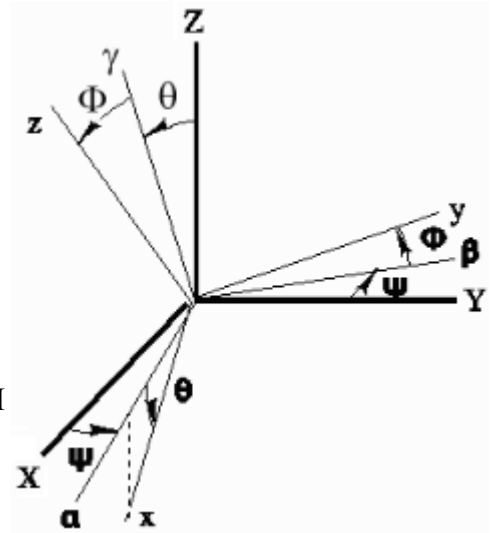
## Matrice de Passage, Angles de Cardan et Quaternions

Afin d'exprimer la Gravité et le Vent dans le repère fusée, on utilise une matrice de passage, ou matrice de rotation, notée DCM ("*Direction Cosine Matrix*").

Tout vecteur exprimé dans le repère Terre (noté  $V_e$  pour Earth) peut être exprimé dans le repère Fusée ( $V_b$  pour Body), et inversement :

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = DCM \cdot \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = DCM^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = DCM^t \cdot \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$$

Il est ainsi possible d'exprimer la gravité dans le repère Fusée ( $G_b = DCM \cdot G_e$ ), ou le vecteur Vitesse dans le repère Terre ( $V_e = DCM^t \cdot V_b$ ).



Cette matrice DCM peut être calculée de plusieurs façons, notamment via les angles d'Euler ou via les Quaternions.

Voici d'abord les formules nécessaires en utilisant les angles de Cardan.

Les angles de Cardan sont une des 12 représentations des angles d'Euler, celle qui effectue les 3 rotations successives  $\psi$ - $\theta$ - $\phi$  autour de Z-Y-X (3-2-1), pour passer du repère Terre au repère Fusée. Cette représentation possède une singularité pour  $\cos\theta=0$  (indétermination entre  $\psi$  et  $\phi$ ).

$$DCM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi & -\sin\theta \\ (\sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi) & (\sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi) & \sin\phi \cos\theta \\ (\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) & (\cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi) & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}$$

Les angles  $\phi$   $\theta$   $\psi$  s'obtiennent par intégration de leurs dérivées, dérivées dont la relation avec les vitesses angulaires en axe fusée p q r est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (\sin\phi \tan\theta) & (\cos\phi \tan\theta) \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

On peut tout aussi bien utiliser les quaternions avec les relations suivantes (c'est un joli exemple d'utilisation des quaternions) :

$$DCM = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_3 & -q_2 & q_1 \\ q_2 & q_3 & -q_0 \\ -q_1 & q_0 & q_3 \\ -q_0 & -q_1 & -q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + K\varepsilon \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

(où K est un gain de valeur quelconque qui permet de s'assurer que la norme du quaternion reste bien unitaire).

## Post-Trajectographie par traitement des capteurs d'une fusée

Les relations précédentes permettent de reconstituer la trajectoire d'une fusée mesurant (en repère fusée) ses 3 vitesses de rotation **p q r** (gyromètres) et sa vitesse longitudinale **Vlongi** (pitot ou accélération longitudinale intégrée, voire pression absolue puis altitude dérivée).

Il n'est pas possible de faire une trajectographie en 3D sans chacun de ces 4 capteurs. En revanche, mesurer aussi les 3 accélérations permet de continuer la trajectographie pendant la phase sous parachute (phase où les vitesses transverses ne sont plus négligeables).

La méthode, de type pas à pas, est identique à la fin de la démarche précédente, à savoir :

- connaissant p q r et les précédents angles de Cardan, calcul de la dérivée des angles de Cardan
- calcul des nouveaux angles de Cardan par intégration
- calcul de la nouvelle matrice de passage DCM
- conversion de la vitesse longitudinale en repère Terre
- calcul par intégration des nouvelles position XYZ en repère Terre

### 7.3. Incidence en sortie de rampe.

Les perturbations en angle d'attaque proviennent essentiellement du vent météo et ont lieu lors du décollage. En effet le vent n'a aucun effet lorsque la fusée coulisse dans la rampe mais, dès qu'elle la quitte, il suffit d'un peu de vent météo et une vitesse de sortie de rampe faible pour obtenir un fort angle d'attaque  $\alpha$  instantané.

Si le vent vient de coté, donc perpendiculairement à la vitesse, un vent  $W$  donnera un angle d'attaque instantané  $\alpha$  tel que :

$$\alpha = \arctan(W / V) \quad \text{où } V \text{ est la vitesse en sortie de rampe.}$$

Pour une vitesse en sortie de rampe de 20 m/s, on obtient :

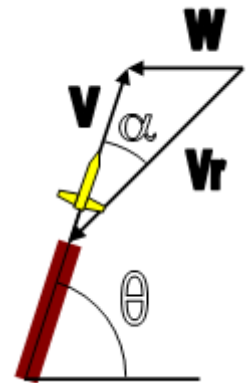
Vent, m/s	0	1	2	3	4	5	6	8	10
Incidence, °	0	2.9	5.7	8.5	11.3	14.0	16.7	21.8	26.6

Si le vent vient de face (dans le plan de la trajectoire), et que le site de la rampe vaut  $\theta$ , un vent  $W$  donnera un angle d'attaque instantané  $\alpha$  tel que :

$$\alpha = \theta - \arctan( V.\sin \theta / (V.\cos \theta + W) ) = \theta - \arctan( \sin \theta / (\cos \theta + W/V) )$$

Pour une vitesse en sortie de rampe de 20 m/s et un site de 80°, on obtient :

Vent, m/s	0	1	2	3	4	5	6	8	10
Incidence, °	0	2.8	5.5	8.2	10.8	13.3	15.7	20.2	24.4



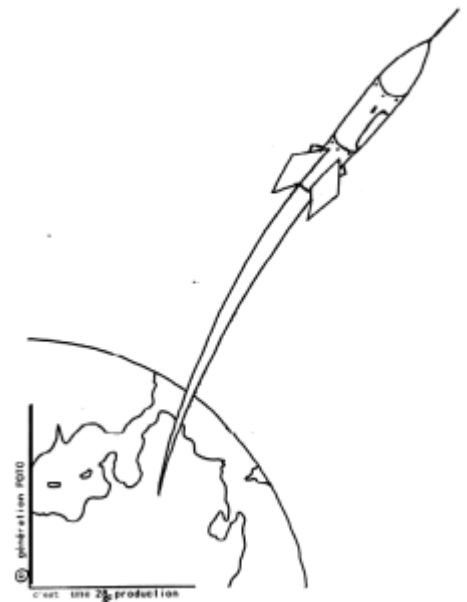
Dans tous les cas, pour des angles d'attaque instantanés supérieurs à 20° il vaut mieux ne pas lancer des fusées dynamiquement instables, sinon on risque d'obtenir des trajectoires déviées ou plus basses que prévues.

Par contre si ces angles ne sont obtenus que lors de rafales et si le dispositif météo (fils de laine, ballons hélium captif, anémomètre) permet de détecter ces rafales avant qu'elles n'arrivent sur la rampe, le problème est réglé. En effet, si la fusée a déjà quitté la rampe depuis quelques secondes lorsque la rafale de vent arrive, la vitesse de la fusée est telle que le vent réel ne modifie que très peu l'angle d'attaque.

*Pour plus d'information sur le critère de vitesse en sortie de rampe, cf. la fin de l'annexe sur [l'évolution des critères de stabilité](#).*

# Chapitre 8 : Calcul analytique des Performances.

- [Chapitre 1 - Généralités sur le vol de la fusée.](#)
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#)
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#)
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#)
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#)
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#)
  - [8.1. Principe de la méthode.](#)
  - [8.2. Formules de calcul.](#)
  - [8.3. Démonstration.](#)
  - [8.4. Abaques de performances.](#)
- [Annexes.](#)



## 8.1. Principe de la méthode.

La méthode du pas-à-pas est la mieux adaptée pour obtenir des informations précises sur la trajectoire de la fusée. En particulier, elle possède les avantages suivants :

- Elle permet de connaître les différents paramètres de vol de la fusée (accélération, vitesse, ...) avec une excellente précision si les pas de calcul sont suffisamment fins par rapport aux variations relatives de ces paramètres.
- Elle offre également la possibilité de tenir compte de la variation nombreux paramètres pour lesquels il n'existe pas forcément de modèle mathématique d'évolution mais dont on connaît la valeur grâce à des tables ou à des mesures. La poussée du moteur, par exemple, est obtenue à tout instant en utilisant la courbe de poussée correspondante. De même, les variations de  $\rho$  et de  $C_x$  peuvent être prises en compte de cette manière.

Cependant, lorsqu'il s'agit simplement d'obtenir une simple estimation de l'altitude ou du temps de culmination, la méthode pas-à-pas peut être assez lourde à mettre en œuvre. Il est alors possible d'obtenir directement une bonne estimation des renseignements recherchés en utilisant les formules données dans les paragraphes suivants.

La méthode utilisée est appelée **méthode analytique** parce que, contrairement à la méthode pas-à-pas, elle considère les variations continues des différents paramètres au cours du temps. Elle consiste à résoudre mathématiquement l'équation du mouvement, ce qui fournit des relations qui donnent à tout moment la position et la vitesse de la fusée. Malheureusement, la résolution de ces équations devient vite extrêmement complexe lorsqu'on essaye de tenir compte des variations de toutes les grandeurs. Les formules présentées ci-dessous sont donc obtenues en faisant les hypothèses simplificatrices suivantes :

- La poussée du moteur  $P$  est constante pendant la phase propulsée (on prend  $P$  égale à la poussée moyenne).
- La masse de la fusée est constante pendant la phase propulsée, égale à la masse totale au départ diminuée de la moitié de la masse de poudre (c'est donc la masse moyenne durant la phase propulsée). Pendant la phase balistique, la masse est égale à la masse totale moins la masse de poudre.
- La résistance de l'air est égale à  $R = Q.V^2$  avec la pression dynamique  $Q = \frac{1}{2}.\rho.S.C_x$  ( $\rho$  et  $C_x$  sont considérés comme constants durant tout le vol).
- Le vol est vertical et sans incidence.



Ici aussi, le point de départ est le principe fondamental de la dynamique. Le bilan des forces appliquées à la fusée permet de déterminer à tout moment l'accélération  $\gamma$  à laquelle celle-ci est soumise.

Lorsqu'on connaît l'expression mathématique de l'accélération, il est possible de déterminer par intégrations successives la vitesse verticale  $V$  puis l'altitude, comme le montrent les relations suivantes :

$$v(t) = \int_0^t \gamma(t).dt \quad \text{et} \quad z(t) = \int_0^t v(t).dt$$

En fait, il n'y a pas de secret, l'idée de base reste la même que pour la méthode pas-à-pas : analyse du bilan des forces et détermination de la vitesse puis de l'altitude.

La différence principale est le mode de représentation des données : la méthode pas-à-pas est une approche de type "analyse numérique" alors que la seconde méthode utilise une représentation formelle des paramètres sous forme de relation du type  $p = f(t)$ . Elle est peut-être plus élégante du point de vue "intellectuel" mais elle ne permet pas de tenir compte des phénomènes fins impossibles à modéliser.

## 8.2. Formules de calcul.

Intermédiaires de calculs :

On pose **a** et **b**, constantes positives définies ci-dessous :

$$\mathbf{a} = (\mathbf{P}/\mathbf{M}) - \mathbf{g}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{Q}/\mathbf{M}$$

Avec :

**P** = Poussée moteur (pendant la phase propulsée)

**M** = Masse totale au départ -  $\frac{1}{2}$ .masse de poudre (pendant la phase propulsée)

**M** = Masse totale au départ - masse de poudre (pendant la phase balistique)

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x$$

Notons qu'il est possible de donner un sens physique à la constante  $1/\mathbf{b} = \mathbf{M}/\mathbf{Q}$ , puisque c'est la distance qu'il faut à la fusée pour voir sa vitesse divisée par  $e=2,72$  lors d'un vol sans force de pesanteur ; on pourrait l'appeler Distance Balistique.

De même, le constante **a** représente l'accélération de la fusée lors d'un vol sans résistance de l'air.

On pose aussi une "constante de vitesse initiale"  $\alpha$  :

- si la vitesse initiale  $V_0$  est nulle (cas courant), alors  $\alpha=1$

- sinon (cas des fusées bi-étage),  $\alpha = \frac{1 - \sqrt{(a/b) \cdot V_0}}{1 + \sqrt{(a/b) \cdot V_0}}$

RESULTATS :

$$t_2 = \frac{\text{Arc tg} \left( \sqrt{\frac{b}{g}} v_1 \right)}{\sqrt{bg}} + t_1$$

$$v_2 = 0$$

$$h_2 = h_1 + \frac{1}{2b} \text{Ln} \left( 1 + \frac{b}{g} v_1^2 \right)$$

Remarque importante :

- Exprimer l'Arc tg en radian.

$t_1$  : donnée (temps de combustion)

$$v_1 = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{e^{2 \cdot \sqrt{ab} \cdot t_1} - d}{e^{2 \cdot \sqrt{ab} \cdot t_1} + d}$$

$$h_1 = h_0 + \frac{1}{2b} \text{Ln} \left( \frac{[e^{2 \cdot \sqrt{ab} \cdot t_1} + d]^2}{(1+d)^2 \cdot e^{2 \cdot \sqrt{ab} \cdot t_1}} \right)$$

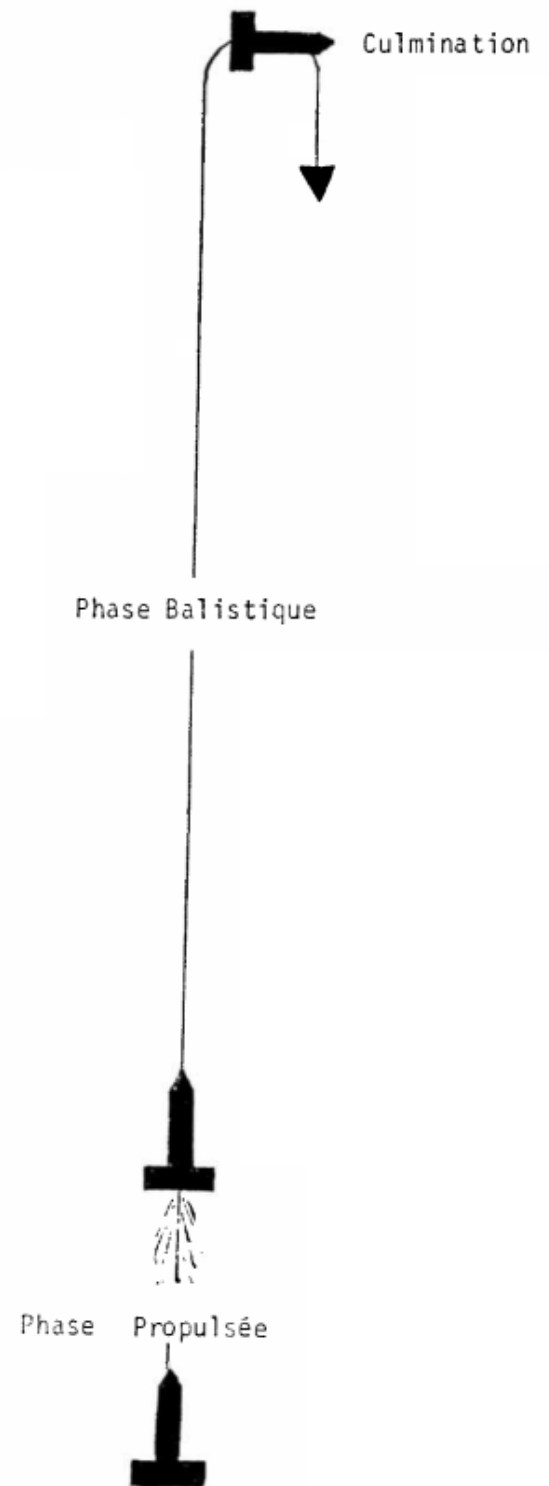
avec

$$d = \frac{1 - \sqrt{\frac{b}{a}} v_0}{1 + \sqrt{\frac{b}{a}} v_0}$$

$$t_0 = 0$$

$$v_0$$

$$h_0$$



## 8.3. Démonstration.

### Phase propulsée

L'équation du mouvement est la suivante :  $\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{P-R}{M} - g$  avec  $R = QV^2$

En posant  $a = P/M - g$  et  $b = Q/M$ , on obtient la relation :  $\frac{dv}{dt} = a - bv^2$  ou encore  $\frac{dv}{a - bv^2} = dt$

En intégrant entre  $t_0$  et  $t$  :  $\int_{t_0}^t \frac{dv}{a - bv^2} = \int_{t_0}^t dt$  d'où  $\frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{t_0}^t \frac{\sqrt{b/a} dv}{1 - (\sqrt{b/a} v)^2} = t - t_0$

Notons que  $\sqrt{b/a} v$  est inférieur à 1 pendant la phase propulsée ( $\gamma > 0$ )

D'où par intégration :  $\frac{1}{\sqrt{ab}} \left[ \text{Ln} \frac{1 + \sqrt{a/b} v}{1 - \sqrt{a/b} v} \right]_{v_0}^v = t - t_0$

En choisissant  $t_0 = 0$  et en posant  $\alpha = \frac{1 - \sqrt{a/b} v_0}{1 + \sqrt{a/b} v_0}$  :  $\text{Ln} \left( \frac{1 + \sqrt{a/b} v}{1 - \sqrt{a/b} v} \right) + \text{Ln}(\alpha) = 2\sqrt{ab} t$

En prenant l'exponentielle ille :  $\alpha (1 + \sqrt{a/b} v) = (1 - \sqrt{a/b} v) e^{2\sqrt{ab} t}$

D'où  $v = \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} \frac{e^{2\sqrt{ab} t} - \alpha}{e^{2\sqrt{ab} t} + \alpha}}$  pour  $t \leq t_1$  (pendant la phase propulsée)

On calcule l'altitude en intégrant  $v$  par rapport au temps :

$$\int_{h_0}^h dh = \int_{t_0}^t v dt = \sqrt{\frac{a}{b}} \int_{t_0}^t \frac{e^{2\sqrt{ab} t} - \alpha}{e^{2\sqrt{ab} t} + \alpha} dt = \sqrt{\frac{a}{b}} \int_{t_0}^t \frac{e^{+\sqrt{ab} t} - \alpha e^{-\sqrt{ab} t}}{e^{+\sqrt{ab} t} + \alpha e^{-\sqrt{ab} t}} dt = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{t_0}^t \sqrt{ab} \cdot \frac{e^{+\sqrt{ab} t} - \alpha e^{-\sqrt{ab} t}}{e^{+\sqrt{ab} t} + \alpha e^{-\sqrt{ab} t}} dt$$

C'est une expression du type (f'/f). La primitive est Ln(f), d'où :

$$h - h_0 = \frac{1}{b} \left[ \text{Ln} \left( e^{+\sqrt{ab} t} + \alpha e^{-\sqrt{ab} t} \right) \right]_{t_0}^t \text{ avec } t_0 = 0$$

$$\text{d'où } h = h_0 + \frac{1}{b} \cdot \text{Ln} \left( \frac{e^{+\sqrt{ab} t} + \alpha e^{-\sqrt{ab} t}}{1 + \alpha} \right) = h_0 + \frac{1}{b} \text{Ln} \left( \frac{e^{\sqrt{ab} t} + \alpha}{(1 + \alpha) e^{\sqrt{ab} t}} \right)$$

$$\text{d'où } h = h_0 + \frac{1}{2b} \cdot \text{Ln} \left( \frac{(e^{2\sqrt{ab} t} + \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2 \cdot e^{2\sqrt{ab} t}} \right) \text{ pour } t \leq t_1$$

## Phase balistique

L'équation du mouvement devient :  $\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{-R}{M} - g$  avec  $R = QV^2$

d'où :  $\frac{dv}{dt} = -(bv^2 + g)$  ou encore  $\frac{dv}{bv^2 + g} = -dt$

Pour pouvoir intégrer facilement, on met l'équation sous la forme :  $\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{bv^2/g + 1} = -dt$

d'où  $\int_{t_1}^t dt = -\frac{1}{g} \cdot \sqrt{\frac{g}{b}} \int_{v_1}^v \frac{\sqrt{b/g} dv}{1 + (\sqrt{b/g} \cdot v)^2}$  et  $t - t_1 = -\frac{1}{\sqrt{bg}} \left[ \text{Arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{g}} \cdot v\right) \right]_{v_1}^v$

La date de culmination est obtenue lorsque la vitesse s'annule, c'est à dire  $v_2 = 0$

d'où  $t_2 = t_1 + \frac{1}{\sqrt{bg}} \text{Arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{g}} \cdot v_1\right)$

Dans ce cas précis, pour déterminer l'altitude maximale, il n'est pas nécessaire d'avoir l'expression littérale de la vitesse.

En effet, on peut écrire :  $v = \frac{dz}{dt}$  d'où  $dt = \frac{dz}{v}$

L'équation de mouvement étant  $\frac{dv}{dt} = -(bv^2 + g)$ , on obtient :

$\frac{v \cdot dv}{dz} = -(bv^2 + g)$  d'où  $dz = \frac{-v \cdot dv}{bv^2 + g}$

En intégrant :  $\int_{h_1}^h dz = \int_{v_1}^v \frac{-v \cdot dv}{bv^2 + g} = \frac{-1}{2b} \int_{v_1}^v \frac{2b \cdot v \cdot dv}{bv^2 + g}$  d'où :  $h - h_1 = \frac{-1}{2b} [\text{Ln}(bv^2 + g)]_{v_1}^v$

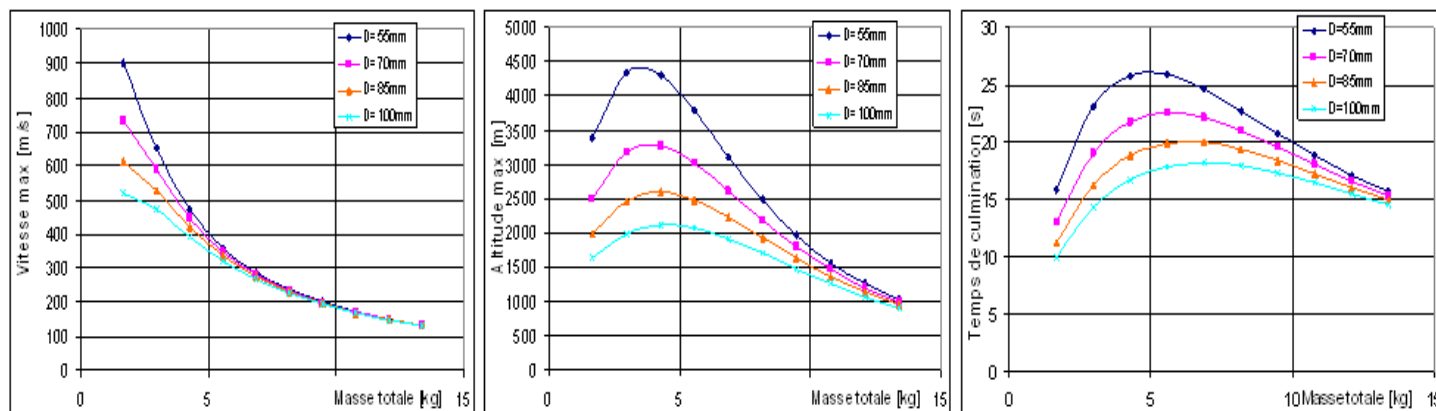
A culmination, on a :  $v_2 = 0$  d'où :  $h_2 - h_1 = \frac{-1}{2b} [\text{Ln}(g) - \text{Ln}(b \cdot v_1^2 + g)]$

d'où :  $h_2 = h_1 + \frac{1}{2b} \cdot \text{Ln}\left(1 + \frac{b}{g} \cdot v_1^2\right)$

## 8.4. Abaques de performances.

Les formules analytiques simples ci-dessus peuvent être utilisées pour tracer facilement des abaques de performances des propulseurs.

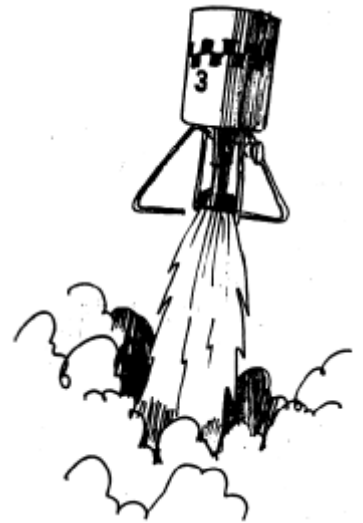
Cela consiste à tracer un paramètre (vitesse max, altitude max ou temps de culmination) en fonction de 1 ou 2 autres paramètres (masse au décollage, diamètre D du fuselage). Voici un exemple d'abaques obtenues à partir d'une feuille de calcul (type Excel) pour le propulseur Pro54-5G classic :



Il est intéressant de noter que l'altitude de culmination maximale n'est pas obtenue avec la masse minimale. Il y a donc une masse optimale permettant de maximiser chaque paramètre, qui peut être estimée grâce à ces abaques (hypothèse d'un vol vertical, calculs approximatifs), et qui peut ensuite être affinée en itérant avec un logiciel de trajectographie pas à pas.

# Annexe : Forces Aérodynamiques.

- [Chapitre 1 - Généralités sur le vol de la fusée.](#)
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#)
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#)
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#)
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#)
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#)
- [Annexes.](#)
  - [Forces Aérodynamiques.](#)
    - [Forces Aérodynamiques](#)
    - [Conventions d'axes & projections](#)
    - [Coefficient de portance, Cn](#)
    - [Moment aérodynamique, Moment de Portance](#)
    - [Coefficient de traînée aérodynamique, Cx](#)
    - [Phénomènes SuperSoniques](#)
    - [Descente sous parachute](#)
  - [Masse Centrage Inertie.](#)
  - [Evolution des critères de stabilité.](#)
  - [Glossaire.](#)
  - [Recherches Bibliographiques.](#)



## Forces Aérodynamiques

Les forces aérodynamiques sont la définition scientifique de la résistance de l'air à l'avancement d'un objet. Elles sont fonctions des formes, des dimensions, de la vitesse et de l'orientation de la fusée ainsi que de la densité de l'air.

Les forces aérodynamiques s'expriment ainsi :  $F = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_{ref} \cdot Coeff \cdot V^2$  avec :

- $\rho$  : la Densité de l'air ( $kg/m^3$ ),
- $S_{ref}$  : la Surface de référence, représentant la dimension du corps de la fusée ( $m^2$ ),
- **Coeff** : les Coefficients Aérodynamiques (sans unité),
- $V^2$  : le carré de la Vitesse relative, ou Vent relatif ( $(m/s)^2$ ).

## Pression Dynamique

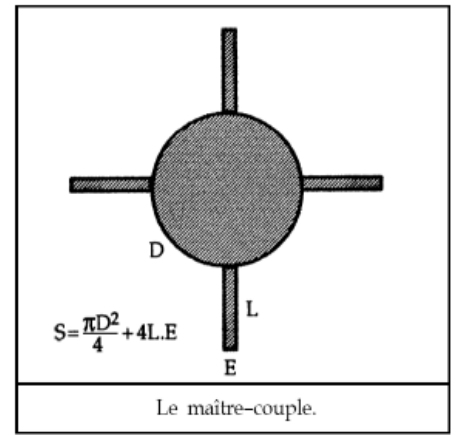
On introduit la Pression Dynamique (ou pression d'arrêt), souvent notée Q et exprimée en Pascal (Pa). Physiquement, cela correspond à la pression créée par la vitesse de l'engin par rapport à l'air, et elle est mesurable aux points d'arrêts de l'écoulement (cf. principe du Tube de Pitot).

Si on considère que l'air est un gaz incompressible (pour des faibles vitesses c'est une approximation correcte) et non visqueux, la théorie prévoit que cette pression a une valeur de  $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2$ .

Il est alors intéressant de noter que la **Force** aérodynamique correspond à une **Pression** multipliée par une **Surface**, à un coefficient près :  $F = Q \cdot S_{ref} \cdot Coeff$

## Surface de référence

En 'fuséologie', on prend généralement comme surface de référence la section transversale maximale de la fusée (ou maître-couple).  
Pour le calcul de la traînée, on inclut souvent l'épaisseur des ailerons afin de représenter leur traînée sans faire varier la valeur du  $C_x$ .  
Pour le calcul du gradient de Portance, la surface de référence est souvent la section de la base de l'ogive ( $S = \pi \cdot D_{ogive}^2 / 4$ ).



Dans l'aviation on choisit plutôt la surface des ailes. En effet, les ailes représentent l'élément sur lequel la force aérodynamique agit le plus en portance et en traînée. Pour nos fusées, l'effet de portance de l'empennage n'est utile qu'à l'orientation de la fusée sur la direction du vent relatif. En effet, pour être performante une fusée doit limiter les forces de portance durant son vol et se présenter alignée sur sa trajectoire. Voilà pourquoi on choisit le maître-couple des fusées comme surface de référence.

## Coefficients Aérodynamiques

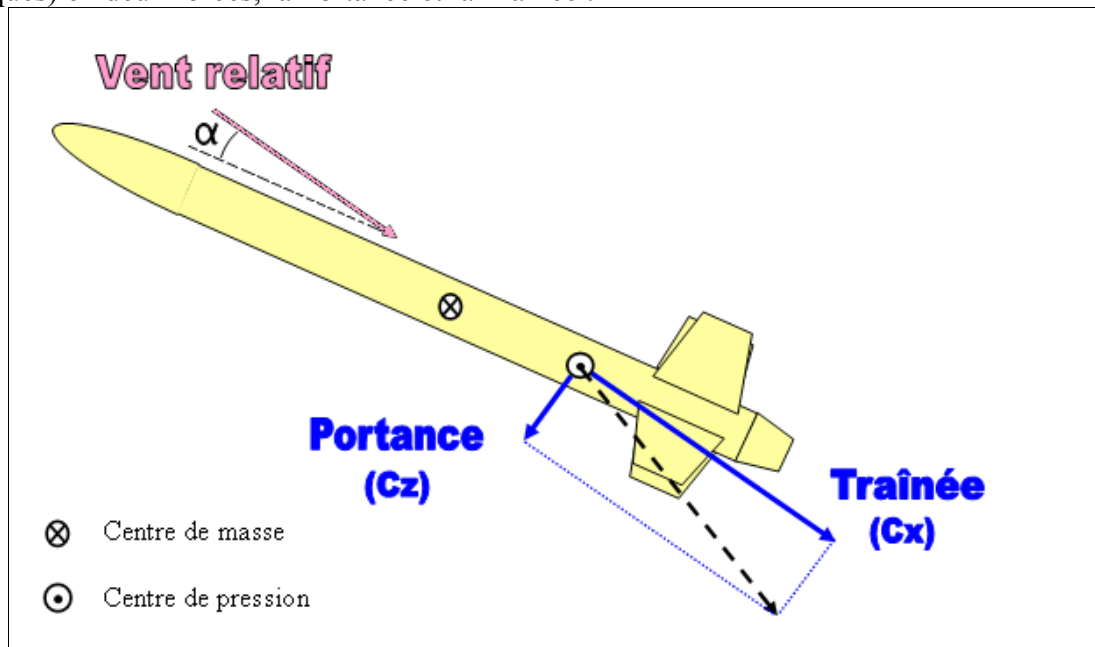
Les Coefficients Aérodynamiques permettent de prendre en compte des phénomènes supplémentaires qui ont une influence sur la valeur de la force aérodynamique. Citons notamment :

- la forme de l'objet
- l'incidence aérodynamique
- le nombre de Mach
- la vitesse de roulis

Voir l'expression de Coefficient de Portance et du Coefficient de Traînée dans les paragraphes ci-dessous.

## Conventions d'axes & projections

Afin de pouvoir utiliser par la suite les résultats, on décompose la force aérodynamique (et les coefficients aérodynamiques) en deux forces, la Portance et la Traînée :



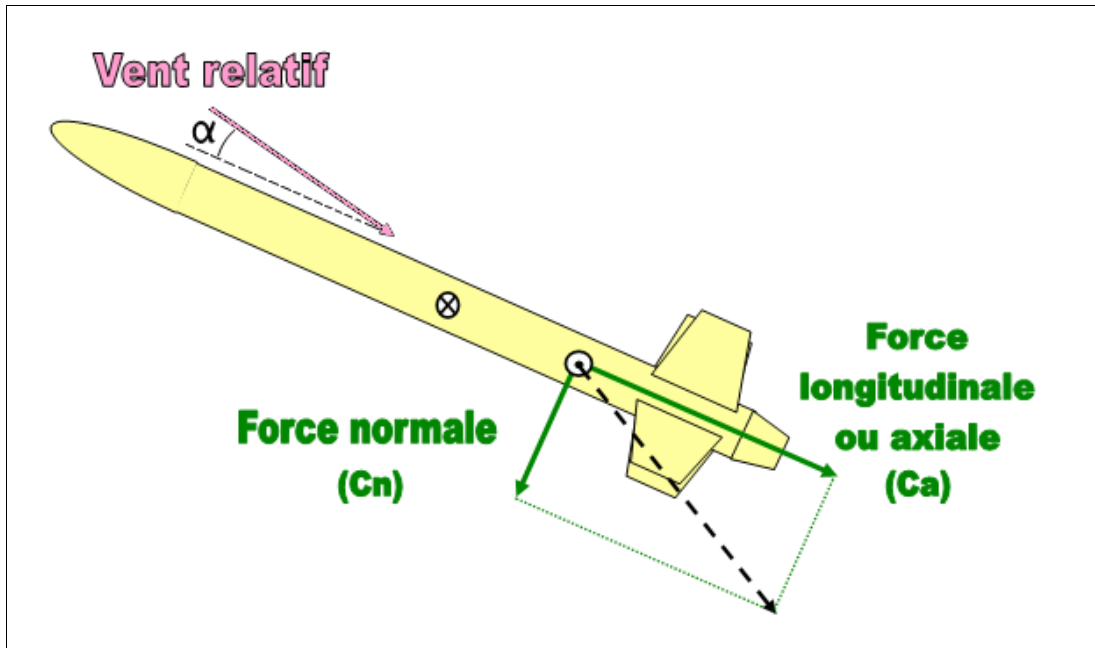
*Décomposition en Portance et Traînée (dans le repère vitesse relative)*

Ces deux forces s'expriment alors en fonction de leur coefficient aérodynamique :

$$\text{Portance} = Q \cdot S_{\text{ref}} \cdot C_z$$

$$\text{Traînée} = Q \cdot S_{\text{ref}} \cdot C_x$$

Il est plus pratique pour l'étude du comportement en vol de décomposer la force aérodynamique en une Force Normale et une Force Axiale :



*Décomposition en Force Normale et Force Axiale (dans le repère fusée)*

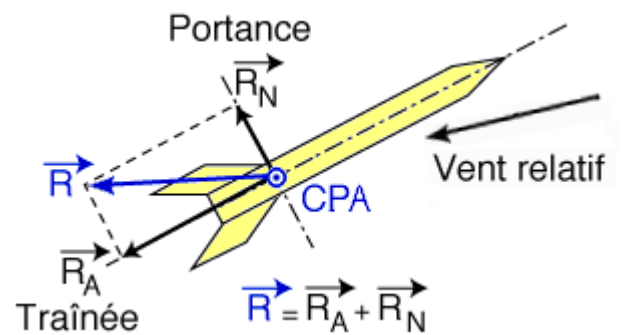
Ces deux forces s'expriment alors en fonction de leur coefficient aérodynamique :

$$\text{Force Normale} = Q \cdot S_{\text{ref}} \cdot C_n$$

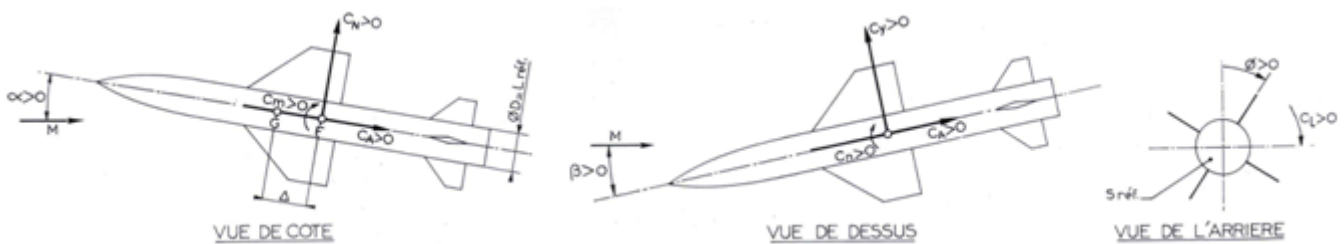
$$\text{Force Axiale} = Q \cdot S_{\text{ref}} \cdot C_a$$

Néanmoins, en fuséologie on parle souvent de "Portance" pour désigner la Force Normale, et de "Traînée" pour désigner la Force Axiale.

La figure ci-contre donne un exemple de cet abus de langage.



Pour les experts des simulateurs 3D (6DDL), les différents coefficients aérodynamiques sont souvent donnés dans le trièdre "Lilienthal" (convention du nom des axes et des signes).



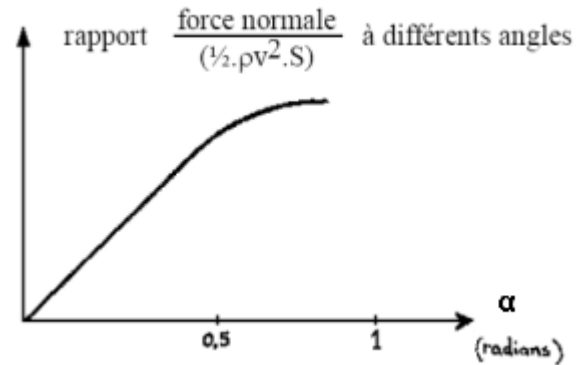


# Coefficient de portance, $C_n$

## Coefficient de portance $C_n = \text{Gradient de portance } C_{n\alpha} \times \text{Incidence } \alpha$

En effectuant des essais en soufflerie, on montre que la valeur du coefficient de Portance dépend de la taille des ailerons, mais aussi de l'angle incidence  $\alpha$ .

Le Coeff  $C_n = F_n / (\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_{ref} \cdot V^2)$  varie en fonction de l'incidence  $\alpha$  selon la courbe ci-contre.



Pour des angles d'incidence  $\alpha$  inférieurs à 0.5rad (30°), on approxime linéairement ce Coeff  $C_n$  par  $C_{n\alpha} \cdot \alpha$ .

Mathématiquement,  $C_{n\alpha}$  représente la pente de la courbe, ou la dérivée de  $C_n$  selon  $\alpha$  ( $C_{n\alpha} = dC_n / d\alpha$ ).

Le terme  $C_{n\alpha}$  est appelé le **Gradient de Portance**, son unité est  $\text{rad}^{-1}$  ou  $\text{deg}^{-1}$ .

Rigoureusement, il faudrait même dire "*Gradient du Coefficient de Force Normale*".

Par abus de langage, le  $C_{n\alpha}$  est souvent appelé "**Portance**" lors du contrôle des [critères de stabilité](#).

Ce **Gradient de Portance**  $C_{n\alpha}$  dépend de la taille des ailerons (notamment). On dit alors qu'il indique "*l'efficacité des ailerons*".

La [méthode de Barrowman](#) permet de déterminer ce **Gradient de Portance**, alors exprimé en  $\text{rad}^{-1}$ .

## Autres expressions du Coefficient de portance

Afin d'améliorer la précision de la modélisation des forces aérodynamiques, il est possible de considérer d'autres approximations du Coefficient de portance.

Le Cn du fuselage est alors calculé en considérant une contribution due à l'écoulement potentiel (terme linéaire) et une contribution due à l'écoulement visqueux (terme non linéaire, portance tourbillonnaire), soit une

formulation de la forme :  $C_{n_{fuselage}} = C_{n\alpha_{fuselage}} \frac{\sin(2\alpha)}{2} + \frac{S_p}{S_{ref}} K \sin^2(\alpha)$

avec  $S_p$  : Surface du fuselage projetée latéralement

$K$  : coefficient compris entre 1,0 et 1,5 , représentant le double du  $C_x$  transverse d'un cylindre de longueur finie,

$C_{n\alpha_{fuselage}} : (S_{fuselage}/S_{ref}) \times 2 \times \cos(\alpha/2)$  d'après Jorgensen (on retrouve le  $C_{n\alpha_{ogive}} = 2$  de Barrowman)

Le point d'application des composantes linéaire et non-linéaires de ce  $C_n$  sont respectivement le foyer aérodynamique du fuselage et environ le centre de surface de  $S_p$ .

Le Cn des ailerons est quant-à-lui exprimé par :  $C_{n_{ailerons}} = C_{n\alpha 0} + C_{n\alpha} \cdot \alpha + C_{n\alpha^2} \cdot \alpha^2$

Cf. "*What Barrowman Left Out*" en [Biblio](#), et le "code missile" (basé sur la théorie de Allen et Perkins pour le fuselage).

# Moment aérodynamique, Moment de Portance

On définit le Moment aérodynamique comme étant le couple créé par les efforts aérodynamiques autour du Centre de Masse.

Ce Moment de Portance est le produit entre la Force aérodynamique et la Marge Statique (bras de levier entre le point d'application de la résultante des forces aérodynamiques et le CdM), autrement dit  $M = F \cdot (X_{CPA} - X_{CdG})$ .

Son expression initiale vaut  $M = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_{ref} \cdot Coeff \cdot V^2 \cdot L_{ref}$  où  $L_{ref}$  vaut par exemple  $D_{ogive}$ .

Par identification, on exprime ce Coefficient de moment  $C_m = C_n \cdot (X_{CPA} - X_{CdG}) / L_{ref}$ , au signe près (convention).

De même, on pose  $C_{m\alpha} = dC_m / d\alpha = C_{n\alpha} \cdot (X_{CPA} - X_{CdG}) / L_{ref}$ .

Inversement, si on mesure  $C_n$  et  $C_m$  en soufflerie, on calcule  $X_{CPA} = X_{CdG} + L_{ref} \cdot C_m / C_n$ .

## Foyer Aérodynamique

Les aérodynamiciens distinguent le Centre de Poussée du Foyer Aérodynamique ("*Aerodynamic Centre*" en anglais).

Lorsque l'incidence passe d'une certaine valeur  $\alpha$  à une autre  $\alpha + d\alpha$ , le foyer aérodynamique est l'endroit où s'appliquent les Forces Aérodynamiques supplémentaires.

C'est aussi le point autour duquel le moment aérodynamique reste constant avec cette variation d'incidence.

Ce modèle aux écarts permet de linéariser les équations autour d'une incidence de vol  $\alpha$  non-nulle.

La position du Foyer Aérodynamique est donnée par la relation :  $X_F = X_{CdG} + L_{ref} \cdot \Delta C_m / \Delta C_n$ .

Pour nos fusées axi-symétriques, l'incidence de vol moyenne est nulle, on peut donc dire que le Foyer aérodynamique est confondu avec le CPA.

## Coefficient de traînée aérodynamique, $C_x$

Le coefficient de traînée aérodynamique  $C_x$  (souvent assimilé au coefficient de force axiale  $C_a$ ) dépend principalement de la forme de la fusée et du nombre de Mach, mais très peu de l'incidence. En vol subsonique, il peut donc être considéré constant au cours du vol (Ouf !).

Pour une MicroFusée, le coefficient de traînée  $C_x$  peut être estimé à partir du tableau suivant :

$C_x$ minimal	Dans tous les cas	0,4
Etat de surface	Bon	+0,0
	Mauvais	+0,4
Tube guide	Absence	+0,0
	Présence	+0,2
Profilage des ailerons	Bon	+0,0
	Mauvais	+1,7
Forme de la pointe	Ogivale	
	Parabolique	+0,0
	Conique longue ( $h>D$ )	+0,0
	Conique courte ( $h<D$ )	+0,1
	Hémisphérique	+0,2
	Plate	+0,8
Creuse	+1,4	
$0,4 < C_x \text{ global} < 4,1$		

Pour des MiniFusées, il est courant de prendre un  $C_x$  compris entre 0,4 et 0,8, avec 0,6 en moyenne.

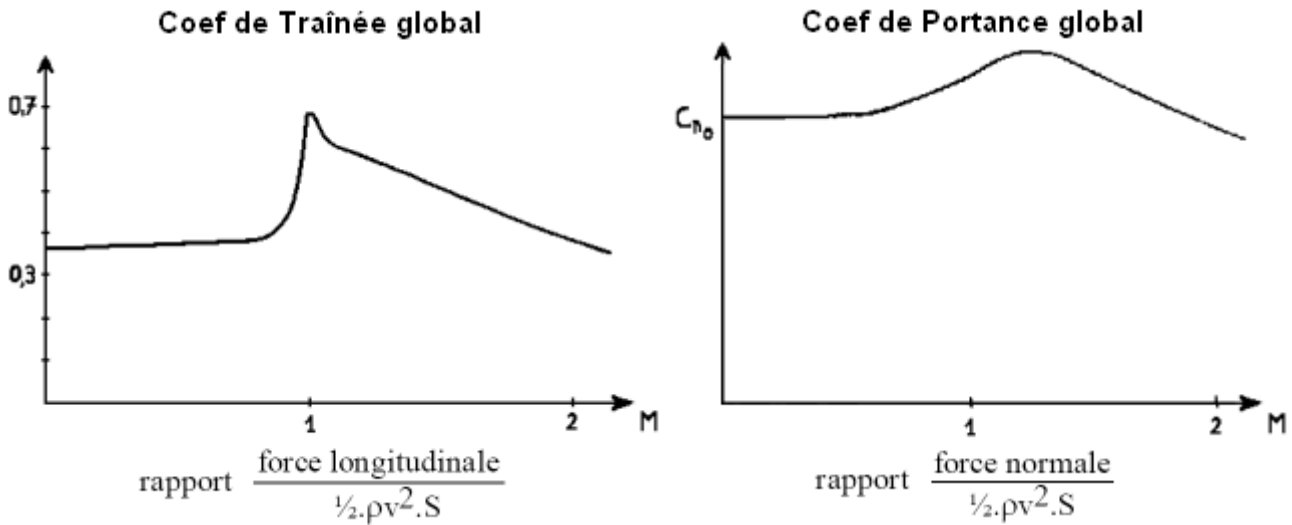
Pour les fusées expérimentales, il existe aussi des outils permettant de calculer la valeur de ce coefficient à partir de la géométrie de la fusée et de quelques caractéristiques (voir RocDrag ([www.iit.edu/~ugcol/](http://www.iit.edu/~ugcol/)) et Aerolab, ainsi que les logiciels de FEM /CFD tels Fluent ...).

Le  $C_x$  varie en fonction du nombre de Mach, en particulier autour de Mach = 1 (voir ci-dessous).

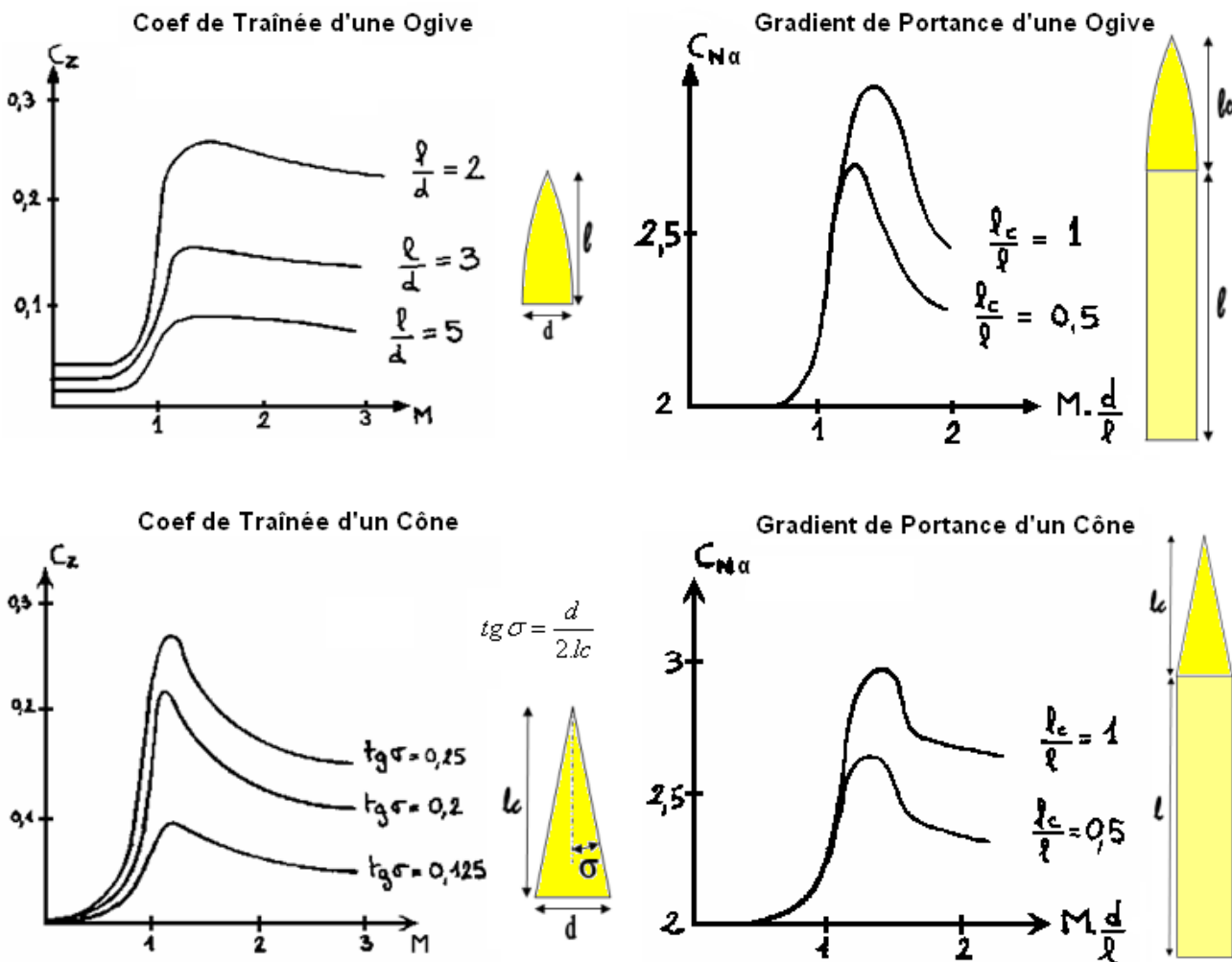
# Phénomènes SuperSoniques

Les courbes suivantes donnent les variations des coefficients aérodynamiques en fonction du nombre de Mach. En effet lorsque l'angle de Mach ( $\tan(\text{angle de Mach}) = 1/M$ ) s'approche des angles des différentes parties de la fusée, les ondes de choc s'approchent de la surface de la fusée et modifient considérablement les coefficients.

On donne d'abord l'évolution des coefficients de Traînée et de Portance de toute une fusée :



On donne ensuite l'évolution de ces coefficients de Traînée et de Portance pour une Ogive et un Cône :



Les abscisses en  $M \cdot d/l$  permettent de présenter des courbes indépendantes de la finesse des cônes.

Rappelons que si on fait varier l'angle d'attaque (pour des valeurs inférieures à 30°, soit 0.5 radian), on constate que le coefficient de Traînée varie très peu, et que le coefficient de portance dépend directement de cet angle d'incidence, donc que le gradient de portance varie très peu.

Voir le document relatant les Essais Aérodynamiques ONERA de 1975 en [Biblio](#).

En restant dans les formules analytiques, il est possible d'introduire le "paramètre de similitude"  $\beta = \sqrt{\text{abs}(M^2 - 1)}$ , puis de corriger les formules de Barrowman d'après la règle de Gothert. Cf. "The practical calculation of the aerodynamic characteristics of slender finned vehicles" et "Design of Aerodynamically Stabilized Free Rockets" en [Biblio](#). Voir aussi les équations publiques du code missile ONERA.

Pour plus de précision, la variation des coefficients aérodynamique selon le Mach peut être obtenu par les simulateurs numériques (FEM), par les résultats des codes semi-empiriques (code missile ONERA, DATCOM) ou en soufflerie.

Dans Trajec 2.x, la variation du Cx (coefficient de Traînée global) est tabulée d'après la courbe de la fusée Doppler lancée par ESIEESPACE le 28/8/88 :

Vitesse (m/s)	0	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475
Facteur multiplicatif du Cx	1	1	1,14	1,36	1,91	2,77	2,59	2,27	1,91	1,77	1,68	1,59	1,55

## Descente sous parachute

Une des applications directes de la formule de la force aérodynamique est le calcul d'une fusée sous parachute.

### Calcul de la vitesse limite sous parachute

Lors de la descente sous parachute, sous l'action des deux seules forces de la pesanteur et de la résistance de l'air, la vitesse augmente ou diminue jusqu'à ce que la traînée égale le poids. L'accélération du mouvement étant alors nulle, la vitesse reste constante. On l'appelle vitesse limite.

$$P = R \rightarrow V = \text{Cste} = V_L$$

$$M.g = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot V_L^2 \rightarrow V_L = \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g}{\rho \cdot S_{\text{para}} \cdot C_{x \text{ para}}}}$$

S : maître couple du parachute, en m<sup>2</sup>

C<sub>x</sub> : coefficient de traînée du parachute (compris entre 0.6 et 0.8)

V<sub>L</sub> : vitesse limite, en m/s

L'ouverture d'un parachute augmente fortement S et C<sub>x</sub>, la vitesse limite, atteinte quasi instantanément, est alors très faible.

### Dimensionnement de la taille d'un parachute

Connaissant la vitesse de descente sous parachute souhaitée (V<sub>L</sub> entre 5 et 10m/s), il est facile de calculer la surface de parachute nécessaire :  $S = 2 \cdot M \cdot g / \rho \cdot C_x \cdot V_L^2$

### Calcul du choc lors de l'ouverture du parachute

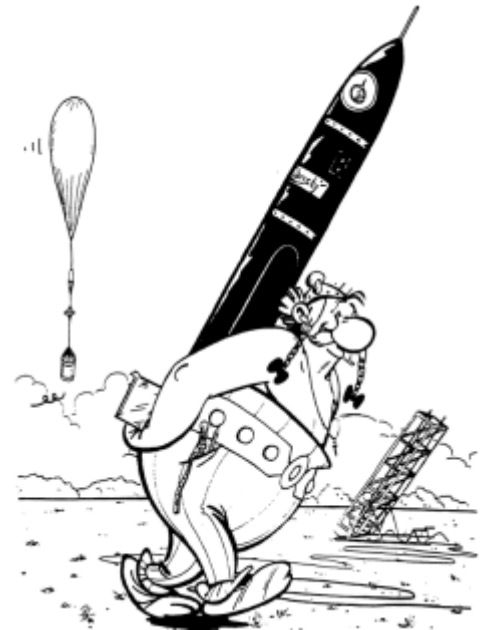
Pour dimensionner les suspentes, il est intéressant d'estimer la force de traction subite lors de l'ouverture du parachute :  $F = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot V_{\text{ouv}}^2$

avec V<sub>ouv</sub> la vitesse de la fusée au moment de l'ouverture du parachute. On peut prendre la vitesse à l'apogée auquel on ajoute une marge.

Nota : le C<sub>x</sub> d'un parachute qui s'ouvre à vitesse **élevée** est réduit de moitié environ (cf. Coefficient de choc = Coefficient masse infinie (Condition de masse) x Facteur correctif (masse finie)).

# Annexe : Masse Centrage Inertie.

- [Chapitre1- Généralités sur le vol de la fusée.](#)
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#)
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#)
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#)
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#)
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#)
- [Annexes.](#)
  - [Forces Aérodynamiques.](#)
  - [Masse Centrage Inertie.](#)
    - [Masse](#)
    - [Centrage](#)
    - [Inertie](#)
  - [Evolution des critères de stabilité.](#)
  - [Glossaire.](#)
  - [Recherches Bibliographiques.](#)



## Masse

### Mesure de la Masse

Il suffit de poser la fusée sur une balance (pour les fusex, un pèse-personne)

### Calcul de la Masse

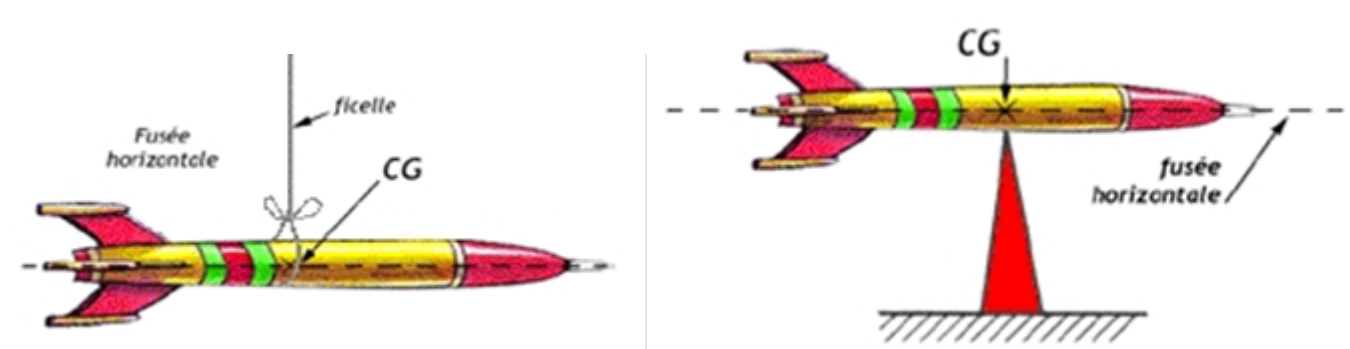
Il suffit d'ajouter la masse des différents constituants.

# Centrage

## Mesure de la position du Centre de Gravité

La détermination expérimentale de la position du Centre de Gravité d'une fusée est simple : c'est le point où la fusée mise à l'horizontale reste en équilibre, lorsqu'elle n'est soumise qu'à la seule force de pesanteur.

Deux méthodes sont possibles, soit en suspendant la fusée, soit en la posant sur un petit objet.



Il suffit alors de rechercher par tâtonnement la position d'équilibre.

La mesure se fait ensuite en relevant la distance entre ce point (CdG) et la pointe de l'ogive (référence).

## Calcul de la position du Centre de Masse

Si la fusée n'est pas encore entièrement fabriquée, il est aussi possible de déterminer la position théorique du Centre de Masse par calcul.

Cela consiste à décomposer la fusée en plusieurs éléments de position et masse connue (produit du volume et de la densité du matériau), puis à trouver le Centre de Masse global par un **barycentre** (Masses pondérées des distances). Exemple avec 2 éléments :  $X_{1\&2} = (X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2) / (M_1 + M_2)$

Certains logiciels effectuent ce calcul (Carina, RockSim, ou encore tout logiciel de CAO).

Cf. le [Glossaire](#) et [Barycentre \(physique\)](#) sur Wikipédia.



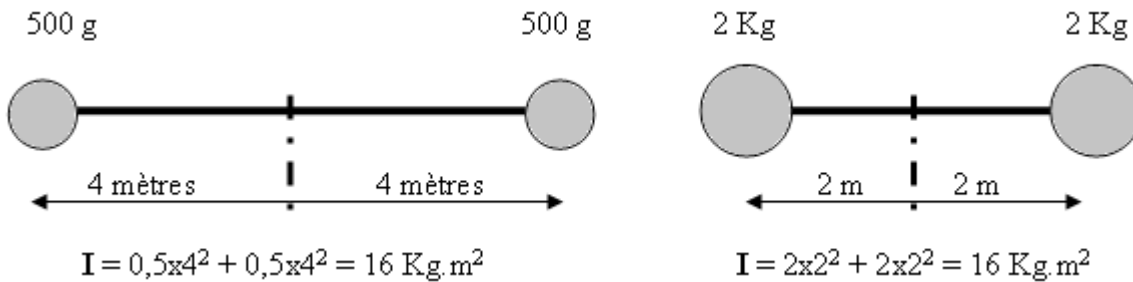
# Inertie

## Définition pratique

L'inertie, ou moment d'inertie, caractérise la facilité à mettre un objet en rotation autour d'un axe donné. Elle est égale à une somme pondérée par le carré de la distance à l'axe de tous les éléments de masse constituant l'objet.

Elle s'exprime en Kilogramme.Mètre<sup>2</sup> et dépend de l'axe de la rotation.

Vite, un exemple : pour les deux altères suivantes, le calcul est simple (on assimile les poids à des points ponctuels et on néglige la barre) :



Pour une rotation transversale, ces deux altères ont le même moment d'inertie.

Le même couple appliqué à l'une et à l'autre les accélérera de la même façon. Pourtant on note que l'une est plus lourde que l'autre. Réciproquement, des objets de même masse peuvent avoir des moments d'inertie différents.

Pour le calcul du moment d'inertie d'objets plus familiers que des altères (des tubes par exemple), on peut se référer aux formules ci-dessous.

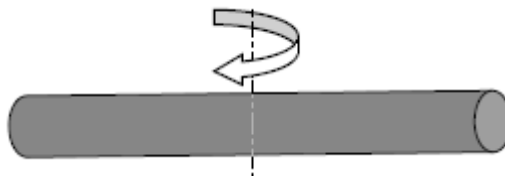
Il n'est pas toujours facile de calculer un moment d'inertie avec précision. Il est préférable de le mesurer, si possible.

## Définition mathématique

En considérant des masses élémentaires  $m_i$ , on a  $I = \int m_i \cdot (x_i - X_{cg})^2$

## Calcul de l'Inertie transverse

On peut supposer que le moment d'inertie transverse d'une fusée est assez proche de l'inertie transverse d'un barreau homogène.



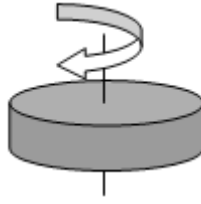
On a alors :  $I = M \cdot L^2 / 12$  avec M la masse en kg et L la longueur en m, donnant une inertie en kg.m<sup>2</sup>.

Dans le cas de fusées résolument non homogènes (sur la longueur), il est alors possible de décomposer la fusées en plusieurs éléments massiques, et de calculer l'inertie globale via la formule :  $I = \sum_i (M_i (X_i - X_{cg})^2 + I_i)$ ,

où  $I_i$  représente l'inertie de l'élément considéré, mesurée ou calculée séparément.

## Calcul de l'Inertie axiale

On peut supposer que le moment d'inertie longitudinal d'une fusée est assez proche de l'inertie axiale d'un disque homogène.

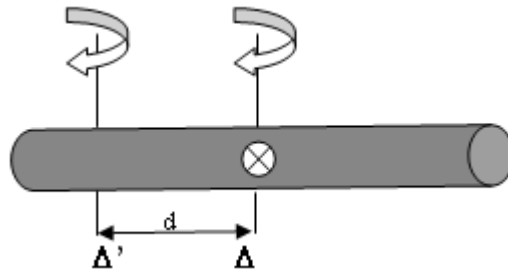


On a alors :  $I = M.R^2/2$  avec R rayon du disque

## Calcul d'une Inertie en un axe autre que le CdG

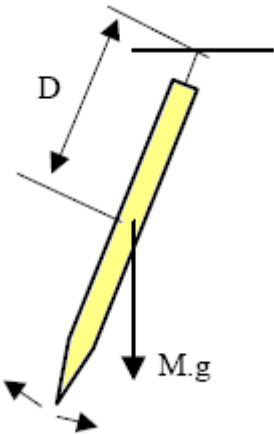
L'inertie I d'un solide est minimale lorsqu'elle est exprimée autour d'un axe de rotation  $\Delta$  passant par son Centre de Gravité.

Si on considère un nouvel axe de rotation  $\Delta'$  parallèle à l'axe de rotation passant par le centre de masse  $\Delta$ , on peut déduire le moment d'inertie  $I'$



On a  $I' = I + m.d^2$  avec m la masse du solide

## Mesure de l'Inertie transverse par pendule



Il suffit tout simplement d'accrocher la fusée et de la faire osciller comme un pendule.

En mesurant la période des oscillations, il est possible de déterminer l'ordre de grandeur de l'inertie transverse de la fusée.

D désigne la distance axe de rotation – centre de gravité.

Si on appelle  $\varphi$  l'angle que fait la fusée avec la verticale, le couple de rappel exercé par le poids vaut  $D.M.g.\tan(\varphi)$  qu'on approxime à  $D.M.g.\varphi$ .

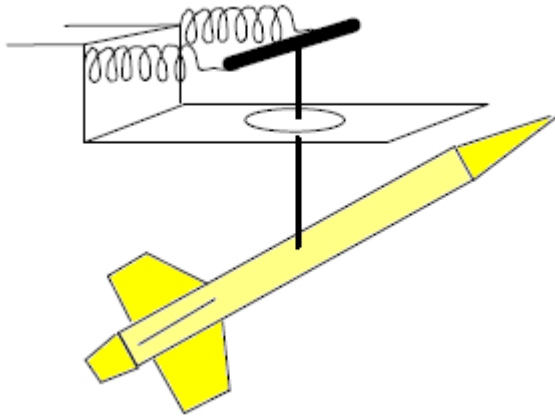
La période d'oscillation T vérifie alors :  $T^2 = 4.\pi^2.I / (D.M.g)$ , avec  $g=9.81m/s^2$ , T en s.

Sachant que le moment d'inertie exprimé au point de l'axe de rotation vaut :  $I = I_{CdG}$

+  $M.D^2$ ,

On en déduit l'inertie qui nous intéresse :  $I_{CdG} = T^2.D.M.g / (4.\pi^2) - M.D^2$ .

## Mesure de l'Inertie transverse par I-mètre



Il est possible de mesurer l'inertie avec plus de précision grâce à un dispositif appelé "I-mètre" ressemblant au schéma ci-contre. L'étalonnage de la raideur des ressorts élastiques est délicat, mais il est possible de s'en passer en remarquant que l'inertie ( $I$ ) est proportionnelle au carré de la période d'oscillation ( $T^2$ ).

En mesurant préalablement la période d'oscillation  $T_{\text{étalon}}$  d'un solide d'inertie  $I_{\text{étalon}}$  connue ou calculable, on obtient alors :

$$I_{\text{fusée}} = I_{\text{étalon}} \cdot T^2 / T_{\text{étalon}}^2$$

## Mesure de l'Inertie transverse par un fil de torsion

Cf. Model Rocketry, The Journal of Miniature Astronautics, April 1969

## Liens

Cf. [Inertie](#) sur Wikipedia

# Annexe : Évolution des critères de Stabilité.

- [Chapitre1- Généralités sur le vol de la fusée.](#)
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#)
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#)
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#)
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#)
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#)
- [Annexes.](#)
  - [Forces Aérodynamiques.](#)
  - [Masse Centrage Inertie.](#)
  - [Evolution des critères de stabilité.](#)
    - [Historique de la stabilité mondiale](#)
    - [Evolution de la marge statique au cours des âges](#)
    - [Evolutions postérieures à 1998](#)
    - [Tableau de Synthèse](#)
    - [Le critère idéal ?](#)
  - [Glossaire.](#)
  - [Recherches Bibliographiques.](#)



## Historique de la stabilité mondiale

### Méthode par l'essai en vol

Avant 1930, la stabilité des fusées était faite à l'intuition, en analysant le résultat des vols précédents, et en testant différentes configurations d'une même fusée.

Notons qu'aujourd'hui, il est conseillé de faire voler en MicroFusée un modèle réduit d'une MiniFusée/Fusex dont la stabilité n'est pas maîtrisée (fusée Tintin par exemple).

Citons pour l'anecdote les premiers vols des fusées de R.H.Goddard, le père de la propulsion liquide :

La première fusée était une fusée tractée avec les réservoirs sous la tuyère et sans aileron : instable

La seconde fusée était une fusée poussée avec les réservoirs au dessus de la tuyère et sans aileron : instable

La troisième fusée était une fusée tractée avec des stabilisateurs sur le coté et la tuyère en haut : trop sensible au vent

Il en arriva finalement au principe de stabilité active par déviation du jet de la tuyère, associé à des petits ailerons.

### Veine d'essai papier de Werner Von Braun

Encore une anecdote : Werner Von Braun a utilisé une méthode ingénieuse pour estimer la stabilité.

Un modèle réduit de la fusée était propulsée dans une série de feuilles de papier étroitement espacées et tenues par des cadres.

Si les trous créés par le modèle lorsqu'il volait à travers les feuilles de papier étaient petits, alors il volait droit.

Si les trous étaient gros, le modèle a du faire des loopings ou des oscillations pendant le vol.

## Stabilisation par mise en roulis

Le fait d'avoir une vitesse de roulis permet de stabiliser la fusée.

Il est possible de faire voler des fusées indifférentes, voire légèrement instables, avec suffisamment de roulis.

Ainsi, de nombreuses fusées-sondes non-guidées étaient conçues pour avoir du roulis.

C'était le cas de certaines "rocket" et bombes militaires de cette époque qui étaient large afin d'avoir un moment d'inertie élevée.

Cette technique de stabilisation par mise en roulis présente 2 désavantages :

- un roulis élevé diminue les performances par augmentation de la traînée

(à 20tr/s, traînée = ~20% de la poussée, d'après Steve Ainsworth dans son article *Roll Control* (Issue 54 of *Extreme Rocketry*, May-June 2006)).

- certaines expériences nécessitent d'avoir un roulis réduit, voire nul (photo ou vidéo...)

## Méthode du CdG de la surface projetée

Cette méthode d'estimation de la position du Centre de Portance, connue sous le nom anglophone de "CardBoard CutOut method", consiste à considérer que toutes les parties de la fusée participe également à la Portance. Le CPA se situe donc au centre de la surface projetée latéralement de la fusée. Certains considèrent encore que cela correspond à la Portance créée avec 90° d'incidence (vent venant d'un côté de la fusée), en oubliant qu'un tube cylindrique présente moins de traînée qu'une plaque plane.

## Mesure expérimentale en soufflerie

Les souffleries permirent de calculer les Portances de différentes formes que compose la fusée, voire d'une fusée complète, mais la généralisation reste problématique.

## Méthode de Barrowman

En 1966, James Barrowman formalisa la méthode d'estimation de la Portance et sa position d'après la théorie des écoulements fluides linéaires.

Cette méthode a très largement été adoptée par les fuséologues amateurs et est encore utilisée de nos jours.

## Notion de Marge Statique

La notion de Marge Statique a été introduite par G. Harry Stine dans son livre "Handbook of Model Rocketry", comme un moyen de quantifier la stabilité d'une fusée.

Il recommanda d'avoir au moins 1 Calibre de Marge Statique, ce qui est devenu une règle d'usage très courante.

Interprétation du Calibre et de la Marge Statique :

"Calibre" s'interprète soit comme le diamètre ogive, soit comme le diamètre max, soit comme le diamètre moyen, selon les cas. Notons que les valeurs de MS ci-dessous sont données pour des fusées de finesse comprise entre 10 et 30 ; une fusée japonaise aplatie sera stable avec seulement 0.5 de MS ; une fusée très fine peut avoir besoin de plus ou moins de MS suivant la position de son CdG par rapport au milieu du corps (cf. "What is Static Margin", et "Wind Instability, What Barrowman Left Out" en [Biblio](#)).

Les limites varient suivant les pays, les organismes, les logiciels, la taille des fusées (cf. [Biblio](#) notamment) :

0.5<MS : NAR safety code (MicroFu)

MS~1 : James Barrowman

0.5<MS<1.5, MS~1 : Japanese model rocket design book

1<MS : [1], NAR agreement, NAR safety code (Minif)

MS~1, MS<2 : [3] (micro & minif), [2] (finesse entre 10 et 30)

1.5<MS<2 : [3] (fusex, plus d'inertie)

2<MS : [4]

MSmin faible, selon le vent : NAR LaunchSafe, LaBudde

1<MS<2, 0.05<amort<0.30 : Mandell

1<MS<2, MS~1.5, RockSim method : Tripoli  
1<MS<2.5 : RockSim  
1<MS<3 : MicroFu Planète-Sciences  
MS<4 : NAR LaunchSafe  
1<MS<5 : SpaceCAD  
1.5<MS<6 : Minif Planète-Sciences  
2<MS<6 : Fusex Planète-Sciences

Notons que le critère sur la valeur de la Portance, voire du produit MS.Cna, est une spécialité franco-française. Cocorico...

## **Barrowman amélioré**

Depuis 1998, de nombreux articles présentent des améliorations à la méthode de Barrowman afin d'être plus précis sans changer radicalement de méthode. Ces recherches sont pertinentes, mais malheureusement très peu utilisées à ce jour par les amateurs. Avis aux amateurs, justement ...

## **Stabilité dynamique**

La théorie de la stabilité dynamique est connue depuis la fin des années 1960, mais les fuséologues amateurs s'y re-intéressent de plus en plus depuis l'an 2000.

## **Codes semi-empiriques**

Des corrélations entre différentes théories et les bases de données de mesures expérimentales en soufflerie permettent aux professionnels (ONERA, NASA...) de prévoir finement les coefficients aérodynamiques d'un certain nombre de formes d'engins (missiles, fusées, avion), en phase avant-projet. Les mesures en soufflerie restent indispensables pour affiner les résultats un fois que la configuration du modèle a été retenue.

## **Simulations numériques**

La puissance de calcul actuelle permet de simuler par élément-finis des souffleries numériques. Pour des études à notre niveau, la qualité des résultats n'est pas toujours excellente comparée aux codes semi-empiriques, et les calculs restent lourds à mettre en place, et long à simuler.

# Évolution de la marge statique au cours des âges

Retranscription d'un article de Arnaud COLMON & Henri KANDEM *publié* dans le [32Info n°60](#) de décembre 1997.

Les "coefficient de portance  $C_n$ " de cet article sont à interpréter comme des "gradient de portance  $C_{n\alpha}$ ".

Les critères de stabilité des fusées ont évolué à plusieurs reprises. Il devient utile de faire le point en rappelant à quoi correspondent ces critères, comment ils sont fixés et pourquoi.

## §1 Les critères de stabilité

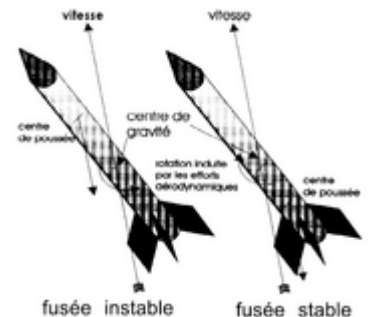
Comme tout membre de club aérospatial, vous connaissez par cœur le cahier des charges. Vous n'êtes donc pas sans savoir que, à la page "vol de la fusée" se trouvent entre autres deux règles qui sont destinées à garantir un vol correct de la fusée (*CdC de novembre 1996*):

$$1,5 < MS = \text{marge statique} < 3$$
$$15 < C_n = \text{coefficient de portance} < 30$$

### §1.1 La Marge Statique

Une fusée tourne autour de son centre de gravité. Elle peut avoir un vol stable (elle vole droit) car des forces aérodynamiques s'appliquent sur sa surface et la ramènent sur sa trajectoire lorsqu'une perturbation l'en éloigne (nous ne faisons pas de contrôle actif de la stabilité). Pour que cela soit vrai, il faut que l'endroit moyen où s'appliquent ces forces aérodynamiques, que l'on appelle "centre de poussée", soit placé en dessous du centre de gravité.

Sur le dessin ci dessous, sont représentées deux fusées qu'une perturbation a écarté de leur trajectoire (la fusée n'est plus alignée avec son vecteur vitesse). La partie gauche représente une fusée instable : le centre de poussée étant plus haut que le centre de gravité, les efforts aérodynamiques font tourner la fusée de façon à l'éloigner encore plus de sa trajectoire. Dans la partie droite du dessin le centre de poussée est en dessous du centre de gravité. Cette fois-ci, les forces aérodynamiques ramènent la fusée sur sa trajectoire : elle est stable.



La marge statique est la distance entre le centre de poussée et le centre de gravité, normalisée au diamètre de la fusée, et comptée positivement quand le centre de poussée est en-dessous du centre de gravité. En théorie, il suffit que la marge statique soit positive pour que tout soit dit et que la fusée soit stable.

### §1.2 Le Coefficient de Portance

En fait, la condition d'avoir une marge statique positive est nécessaire mais pas suffisante. Nous sommes seulement garantis que les forces aérodynamiques agissent dans le bon sens. Il faut encore qu'elles soient suffisamment fortes pour avoir un effet notable. Pour une vitesse donnée, ces forces sont dépendantes de la géométrie de la fusée (essentiellement des ailerons). Il faudra donc faire des ailerons suffisamment grands pour créer des forces aérodynamiques conséquentes. Le coefficient de portance est une estimation normalisée du facteur géométrique de ces forces aérodynamiques.

## §1.3 Les Critères

Les paragraphes précédents semblent dire :

$$MS > 0 \text{ et } C_n > C_{nmin}$$

En pratique, les mesures des dimensions des fusées ne sont pas parfaites, et surtout, les calculs aérodynamiques étant très complexes, les formules que nous utilisons ne sont que des approximations (valables pour certaines formes de fusées, ce qui justifie le critère de finesse des fusées). Il faut donc prendre des marges pour garantir que ces erreurs ne conduisent pas à une fusée instable. Nous avons donc :

$$MS > MS_{min}, \text{ et } C_n > C_{nmin}$$

Par ailleurs, si ces deux valeurs sont trop grandes, le moindre souffle de vent va coucher la fusée. Elle est dite "surstable". Dans ce cas, ce n'est pas la fusée qui s'écarte de sa trajectoire mais le vecteur vitesse qui change d'orientation. Le vent qui s'applique sur la fusée est composé du vent du à la vitesse (presque vertical au décollage), combiné avec le vent météorologique (horizontal). Peu après la sortie de rampe, le vent du à la vitesse est encore faible et le vent météorologique peut donc ne pas être négligeable. Le vent résultant peut être écarté de plus de  $10^\circ$  de l'axe de la fusée. Si le coefficient de portance et/ou la marge statique sont très élevés, les efforts aérodynamiques vont être très élevés, et la fusée va pivoter pour s'aligner, comme une girouette, avec le vent apparent. L'altitude et le temps de culmination diminuent fortement. Cela explique :

- Le critère de vitesse minimum en sortie de rampe,
- Le critère de vitesse maximum du vent au décollage,
- Que l'on cherche à lancer face au vent.

Le problème de la surstabilité impose des valeurs maximales pour les deux coefficients.

## §2 Les évolutions des critères

Les plus anciens documents que nous avons retrouvés (vers 1985) indiquaient les règles suivantes :

$$1 < MS < 3 \text{ et } C_n > 9$$

Les fusées volaient très correctement. Mais un jour apparut le Bambi. Il s'agissait d'un propulseur dérivé de la fusée paragrêle de Ruggieri. Ce moteur, comparable à un Isard, avait la particularité d'être très long (980 mm), et très léger (1,8 kg), l'enveloppe étant en résine époxy. Les fusées équipées de ce moteur étaient donc très longues, avec un centre de gravité très haut. Pour respecter la marge statique maximum de 3, il fallait placer les ailerons en haut du moteur, soit à 1 m du bas de la fusée ! Outre les formes curieuses obtenues, certains vols étaient limités, les approximations faites dans les calculs étant sans doute dépassées.

La solution décidée à l'époque, et qui apparaît dans l'édition d'avril 1988 du cahier des charges, est d'élargir la plage des marges statiques et de prendre plus de marge sur le coefficient de portance :

$$1 < MS < 9 \text{ et } C_n > 15$$

Cette modification a permis aux fusées équipées de Bambi de voler correctement. Mais petit à petit, pour toutes les fusées, les marges statiques ont augmenté, les clubs visant la moyenne, soit 4 ou 5, au lieu de 2 précédemment. De même les ailerons ont grandi.

Certains problèmes de surstabilité sont apparus et une nouvelle mouture du cahier des charges, publiée en juin 94, a tenté d'améliorer les choses:

$$1,5 < MS < 7 \text{ et } 15 < C_n < 30$$

En 1994, il y a déjà plusieurs années qu'il n'y a plus de Bambi, et cette diminution de marge statique maximum ne pose pas de problème. Dans le cadre du renforcement des préoccupations concernant la sécurité, une marge supplémentaire est prise vers le bas. Pour le coefficient de portance, un seuil haut est fixé, limitant la surstabilité.



Mais parallèlement, on constate une diminution des temps de culmination des fusées. Plusieurs études sont menées: on ne trouve pas d'erreur dans Trajec, pas de dérive de la courbe de poussée des propulseurs ? ... Le seul facteur ayant un effet notable sur le temps de culmination des fusées est l'angle de lancement, qui peut être rapidement modifié quand une fusée surstable se couche dans le vent en sortie de rampe. Il semble alors urgent de diminuer les risques de surstabilité des fusées en diminuant les valeurs des critères. C'est l'objet de l'édition de novembre 1996 du cahier des charges :

$$1,5 < MS < 3 \text{ et } 15 < C_n < 30$$

Cette modification a eu ses premiers effets lors du festival 1997.

### §3 Nouvelle évolution

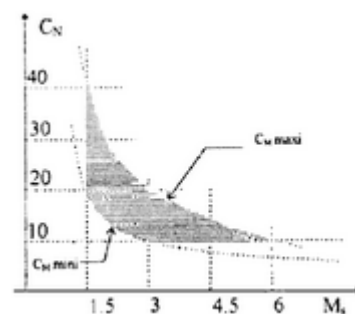
Il est apparu lors du dernier festival que ces nouveaux critères n'étaient pas parfaits. Dans des conditions limites (vent fort), une fusée aux limites (coefficient de portance minimum et marge statique minimale) ne volait pas correctement. De plus la fourchette étroite de marge statique semblait difficile à atteindre pour certains clubs (sans doute une question d'habitude, car il y a quelques années, ... !).

D'autre part, quand on s'intéresse à la rotation de la fusée, il ne suffit pas de s'intéresser au point d'application de la force, ni à la valeur de la force, mais au produit des deux. Ce produit s'appelle un couple [*Moment*], et c'est lui qui est important. En théorie un critère sur ce produit est suffisant. En pratique, les limites du modèle imposent de conserver des valeurs minimales sur les deux paramètres. Les nouveaux critères pour 1998 seront donc les suivants :

$$30 < C_n \cdot MS < 60 ; MS > 1,5 \text{ et } C_n > 10$$

On évite ainsi les cas extrêmes où les fusées risquent fortement l'instabilité ou la sur-stabilité, tout en augmentant les plages autorisées pour les coefficients. La conséquence des critères ci-dessus est que la marge statique peut atteindre 6 si le coefficient de portance est faible, et qu'un coefficient de portance de 40 est acceptable si la marge statique est faible.

Sur un graphique où l'on représente  $C_n$  en fonction de  $MS$ , l'ancien domaine autorisé qui était rectangulaire, est remplacé par une zone plus compliquée limitée par 2 droites et 2 hyperboles.



*Nota : ce dernier paragraphe rejoint une remarque de Laurent Regnault : il semble que jusqu'en 1997 le critère  $C_n \cdot MS$  n'existait pas. C'est suite à un vol d'une fusée du Furobalex de 1996 avec des ailerons au dessus du propulseur que cette règle est apparue (elle avait fait un superbe looping malgré le fait qu'elle était dans les bornes du  $C_n$  et de la  $MS$ )*

# Évolutions postérieures à 1998

## Durcissement des critères fusex vers l'an 2000

$40 < MS \cdot Cn\alpha (< 100)$  ;  $2 < MS < 6$  et  $15 < Cn\alpha < 40$

Selon les souvenirs d'Etienne Maier, tout serait parti du changement de terrain en 1999 (de Bourges à Millau) et de l'évolution du document Calcul des temps de descente sous parachute. Même si le rapport n'est pas évident, cela a été l'occasion de 3 évolutions :

- $Cn\alpha$  max qui passe de 40 à 30 (en minif ?)
- Introduction de la limitation du produit  $MS \times Cn\alpha$  à 100
- Distinction critères minif et fusex

Selon Laurent Regnault, lors de la campagne de Millau il y avait de nombreuses divergences d'opinion sur les critères de stabilité, et donc des acceptations ou non des dérogations en fonction des personnes ! A l'initiative du responsable des contrôles, une réunion entre les membres du CNES et des bénévoles de l'ANSTJ (ex Planète Sciences) a eu lieu, et peu après une note signée du CNES (Alain Dartigalongue et Denis Dylan) donnait ces valeurs comme consensus.

Il n'y a donc pas vraiment de raison à part la mise en place d'un compromis.

## Durcissement des critères minif en 2004

$30 < MS \times Cn\alpha < 100$  ;  $1.5 < MS < 6$  ;  $15 < Cn\alpha < 30$  et  $10 < f < 20$

En juillet 2003, la minifusée Apollux II a réalisé un vol en arrière suite à 2 claques en sortie de rampe, retombant au niveau du public. Cette minifusée respectait les critères en vigueur, avec une tendance sur-stable et une finesse élevée. Une des hypothèses pouvant expliquer ce vol est l'effet d'une rafale de vent mal orientée associé à la sur-stabilité.

Durant le moratoire qui a suivi, la commission SSRJ (sécurité) a alors décidé de réduire les limites supérieures des critères et d'ajouter le produit (comme en fusex), pour éviter les fusées trop sensibles.

De plus il y a eu un durcissement du cahier des charges au niveau de la structure avec l'apparition du test de flèche dynamique, ceci pour éviter que la fusée ne plie trop en vol.

## Distinction entre critères minif et critères fusex

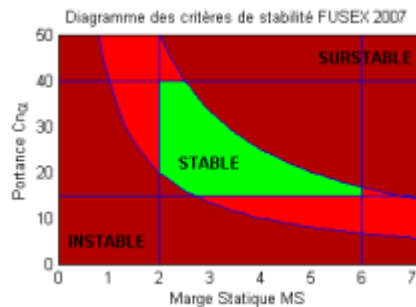
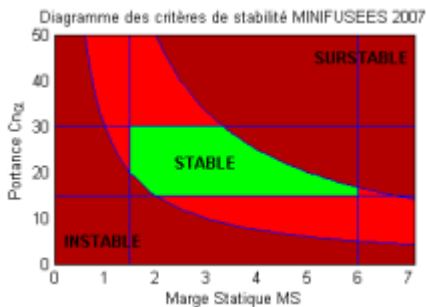
Historiquement, les minifusées ont héritées des critères  $\mu$ -fusées, puis évolution parallèle avec des équipes de bénévoles distinctes de celle des fusex.

Critère fusex plus dur car plus de temps pour faire la fusée, demande d'une démarche plus rigoureuse, qualité attendue plus élevée.

On aurait aussi "accepté" des critères différents entre minif et fusex notamment parce que les minifs vont plus vite et sont plus fines que les fusex, donc a priori, moins sensibles au vent...

# Tableau de Synthèse

		Minif	Fusex
Données numériques sur le vol des fusées (vers 1983)	Cn $\alpha$ MS	- -	9<Cn 1<MS<3
CdC fusex avril 1988	Cn $\alpha$ MS	- -	15<Cn 1<MS<9
Le Vol de la fusée (édition mai 1991)	finesse Cn $\alpha$ MS	- 9<Cn 1<MS<3	15<f<30 15<Cn<30 1.5<MS<7
CdC fusex juin 1994	Cn $\alpha$ MS	- -	15<Cn<30 1.5<MS<7
CdC fusex novembre 1996 Festival 1997	Cn $\alpha$ MS	- -	15<Cn<30 1.5<MS<3
Trajec v2.2 (1996)(minif) Festival 1998 (fusex) CdC minif & fusex 1998/99	Vsortie rampe min finesse Cn $\alpha$ MS MSxCn	20 10<f<25 15<Cn<30 1.5<MS<7 -	20 10<f<35 10<Cn(<40) 1.5<MS(<6) <b>30&lt;MSxCn&lt;60</b>
Trajec v2.3 (juin 2001)(minif) Festivals 2001 & 2002 (minif & fusex) CDC minif v5 (sept 2002)	Vsortie rampe min finesse Cn alpha MS MSxCn	18/20 10<f<25 15<Cn<30 1.5<MS<7 -	20 10<f<35 <b>15&lt;Cn&lt;40</b> <b>2&lt;MS&lt;6</b> <b>40&lt;MSxCn(&lt;100)</b>
Trajec v2.4 (avril 2005)(minif) CDC v2.0 & v2.1 (oct 2004 & oct 2005)	Vsortie rampe min finesse Cn $\alpha$ MS MSxCn	18/18 10<f< <b>20</b> 15<Cn<30 1.5<MS< <b>6</b> <b>30&lt;MSxCn&lt;100</b>	20 10<f<35 15<Cn<40 2<MS<6 40<MSxCn(<100)



# Le critère idéal ?

## Budget de Stabilité en Marge Statique

Analysons les raisons qui nous poussent à prendre une Marge sur la position du CPA Statique donné par l'estimation de Barrowman :

- méthode dont la précision générale est au mieux de +/-10% sur le  $C_{n\alpha}$ , et +/-0.5 calibre ou +/-10% sur le  $X_{cp}$
- calculs basés sur des mesures approximatives (dimensions, masses...)
- hypothèse : CdM parfaitement centré, le propulseur bien centré et orienté, ailerons alignés
- hypothèse : fusée rigide (pas d'aéro-élasticité, phénomène qui peut faire varier de +/-10% le  $C_{n\alpha}$  et le  $X_{cp}$ )
- hypothèse : calcul à incidence nulle (vent nul)

Chacune de ces approximations peut se quantifier en terme de MS notamment, et on peut ainsi définir un "Budget de Stabilité" (MS min à avoir).

Cf "Extending The Barrowman Method For Large Angle Of Attack" et "A Design Procedure for Maximizing Altitude Performance, interpreting dynamic stability" en [Biblio](#).

## Moment de correction

On pourrait se demander pourquoi un seul critère sur le produit  $MS \cdot C_{n\alpha}$  (Couple) ne suffirait-il pas.

La principale raison est l'imprécision que l'on a sur le  $C_{n\alpha}$  ou la MS.

Dans des cas extrêmes (MS très faible et  $C_{n\alpha}$  très élevé ou inversement) respectant *a priori* le critère du produit  $MS \cdot C_{n\alpha}$ , la moindre petite erreur sur la MS ou le  $C_{n\alpha}$  ferait sortir du domaine de produit  $MS \cdot C_{n\alpha}$ .

Aussi, afin de tenir compte de ces imprécisions, il ne paraît pas idiot de limiter les cas de  $C_{n\alpha}$  ou MS extrêmes.

## Accélération angulaire, fréquence propre

Mais pourquoi limiter la valeur d'un couple, indépendamment de la masse de la fusée ?

Il peut être intéressant de faire intervenir l'inertie transverse de la fusée dans le critère, alors exprimé en accélération angulaire de type  $MS \cdot C_{n\alpha} / I$ .

Cela se rapproche du coefficient  $C_1 / I$  utilisé en stabilité dynamique :  $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{C_1}{I} \alpha$  avec  $C_1 = Q \cdot C_{n\alpha} \cdot MS$

Mais souhaite-t-on la même accélération angulaire pour une fusée expérimentale que pour une MicroFusée ?

Notons qu'un tel critère peut aussi s'exprimer en terme de pulsation naturelle (

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho \cdot S_{ref} \cdot C_{n\alpha} \cdot (X_{CPA} - X_{CDG})}{2 \cdot I}} \cdot V \text{ comprise entre } 0,2 \cdot V \text{ et } 1,0 \cdot V \text{ en minif, cf } \text{\textcircled{4.1.}}$$

## Oscillations et amortissement

En approfondissant le concept de stabilité dynamique, on arrive naturellement à la notion d'amortissement et de pulsation propre, qui sont interprétables. Par exemple, on pourrait définir un nombre maximum d'oscillations pendant la phase propulsée, associé à un amortissement convenable.

## Incidence en sortie de rampe

Enfin, petite parenthèse sur les critères parallèles que sont la vitesse minimale en sortie de rampe, la longueur minimale de la rampe, et le vent maximal. Tous ces critères sont liés entre eux et avec la MSmin par la relation suivante : Calculons l'incidence en sortie de rampe dans le pire cas :

vent max : 5m/s de vent météo (horizontal) ; vitesse min : 20m/s de vitesse fusée (quasi-vertical)

>> 14° d'incidence aérodynamique en sortie de rampe (cf. [§7.3.](#))

Or le CPA d'une fusée standard soumise à une telle incidence se déplace vers l'avant de 0.75 à 1.25 diamètre, à cause de la portance des tubes cylindriques et du décrochage des ailerons.

D'où la Marge Statique min à 1.5 calibre. Cf "Wind Instability, What Barrowman Left Out" et "Static and Dynamic Stability Considerations" en [Biblio](#).

# Annexe : Glossaire.

- [Chapitre1- Généralités sur le vol de la fusée.](#)
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#)
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#)
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#)
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#)
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#)
- [Annexes.](#)
  - [Forces Aérodynamiques.](#)
  - [Masse Centrage Inertie.](#)
  - [Evolution des critères de stabilité.](#)
  - **[Glossaire.](#)**
  - [Recherches Bibliographiques.](#)



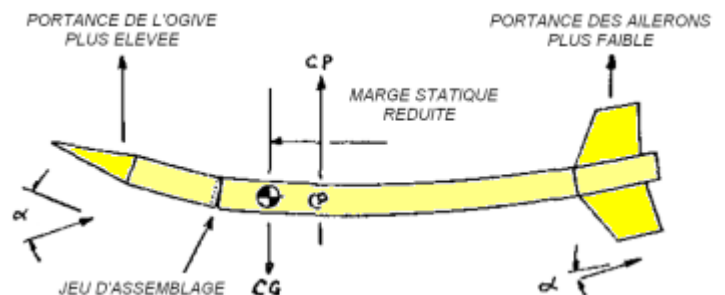
Conseil : faites une recherche dans la page (Ctrl-F) du terme souhaité.

## Accélération

Grandeur physique caractérisant la variation de vitesse par unité de temps. Le principe fondamental de la dynamique énonce la relation entre la masse d'un objet, son accélération et les forces appliquées. Elle est exprimée en mètres par seconde carré ( $m/s^2$ ).

## Aéroélasticité

Variation des forces aérodynamiques lorsque la fusée se déforme. En considérant les incidences locales de la figure ci-contre, on voit qu'une telle fusée présente une marge statique et une portance bien plus faible que si elle était droite et rigide.



## Allongement des ailerons, Aspect Ratio, AR

L'allongement des ailerons indique la forme des ailerons. L'*Aspect Ratio* (terme anglais) augmente lorsque l'envergure augmente. [cf. §3.3.]

## Attitude

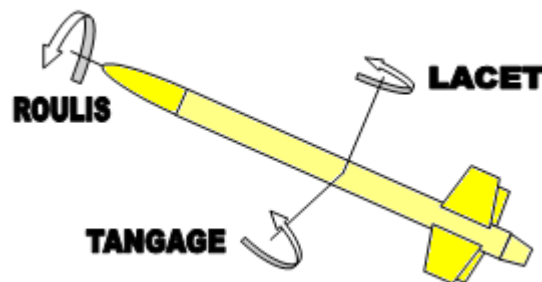
L'attitude de la fusée signifie son orientation par rapport à un référentiel donné.

## Axes Aérodynamiques, Roulis, Tangage, Lacet

Roulis : mouvement de rotation de la fusée autour de son axe longitudinal.

Tangage : mouvement d'oscillation de la fusée se produisant dans le sens de la longueur.

Lacet : mouvement d'oscillation de la fusée autour de son 3<sup>e</sup> axe.



## Calibre, Diamètre, D

Diamètre principal de la fusée. En général, le diamètre de référence est celui de la base de l'ogive.

## Centre de Gravité, CdG, CoG, CG, Centre de Masse, CdM, CoM, Centre d'Inertie, Cdl

CdM (ou Cdl) : barycentre de toutes les masses élémentaires d'un corps. La fusée tourne autour de son Centre de Masse.

CdG : point d'application de la résultante des actions de la pesanteur sur toutes les parties d'un corps (Poids). Dans un champ de pesanteur constant (taille de l'objet petit par rapport à la rotondité de la Terre), ces 2 points sont identiques.

Par abus de langage, on parle souvent de CdG pour désigner le CdM.

La position de ce centre est notée  $X_{cg}$  ou  $X_{cdg}$ , distance repérée par rapport à la pointe de l'ogive. [cf. annexe [Centrage](#)]

## Centre de Poussée Aérodynamique, CPA, Centre de Pression, Cp, Centre Latéral de Poussée, CLP

Point d'application de la résultante des forces aérodynamiques sur toutes les parties d'un corps en déplacement dans un milieu résistant.

La position de ce centre est notée  $X_{cp}$  ou  $X_{cpa}$ , distance repérée par rapport à la pointe de l'ogive. [cf. [§3.](#)]

## Coefficient de Portance, Cz, Cl, Coefficient de force Normale, Cn

Coefficient aérodynamique sans dimension intervenant dans la relation donnant la valeur de la portance en fonction de la vitesse.

Le terme de "Coefficient de Portance  $C_n$ " désigne souvent le "Gradient de Portance  $C_{n\alpha}$ " par abus de langage. [cf. annexe [Aéro](#)]

## Coefficient de Traînée, Cx, Cd, Coefficient de force Axiale, Ca

Coefficient aérodynamique sans dimension intervenant dans la relation donnant la valeur de la traînée en fonction de la vitesse. [cf. annexe [Aéro](#)]

## Couple de forces, Moment de forces

Un couple de force est le produit d'une ou deux forces par un bras de levier ; il s'exprime en N.m. [cf. [§2](#) & [§4](#)]

## Débit massique, $\dot{m}$ , $q$

Une des grandeurs caractéristiques d'un propulseur à poudre. Correspond à la masse de poudre brûlée par unité de temps. Le débit massique est mesuré en kilogramme par seconde (kg/s) dans le système international (et donc partout sauf chez les anglais). [cf. [§4.2.](#)]

## Empennage

Ensemble d'ailerons situés au même niveau.

## Finesse, élancement, longueur relative

Rapport entre la longueur du fuselage et le diamètre de référence d'une fusée. [cf. [§2.4.](#)]

## Gisement de la rampe de lancement

Angle horizontal donnant l'orientation de la rampe par rapport au Nord. [cf. [§5.3.](#)]

## Gradient de Portance, Gradient du Coefficient de force Normale, $C_{n\alpha}$ , $C_{na}$

Dérivée du Coefficient de Portance selon l'incidence  $\alpha$ , représente l'efficacité des ailerons. [cf. annexe [Aéro](#)]

## Incidence, $\alpha$ , angle d'incidence aérodynamique, angle d'attaque, AoA, dérapage, $\beta$

Angle entre la direction de la vitesse relative et l'axe longitudinal de la fusée. Il est exprimé en degré ( $^\circ$ ) ou en radians (rad).

Une fusée est dite "en incidence" lorsque son axe longitudinal n'est pas parallèle à la direction de sa vitesse. [cf. [§2.1.](#)]

## Indifférence

Etat d'une fusée pour laquelle Centre de Poussée Aérodynamique et Centre de Gravité sont presque confondus. Il s'agit généralement d'une situation transitoire. [cf. [§2.3.](#)]

## Inertie, moment d'inertie, $I$ , $J$ , $M_oI$

L'inertie, ou moment d'inertie, caractérise la facilité à mettre un objet en rotation autour d'un axe donné. [cf. annexe [Inertie](#)]

## Instabilité

Comportement d'une fusée pour laquelle les perturbations d'incidence ne sont pas compensées mais accentuées. C'est le cas lorsque le centre de poussée est situé au-dessus au Centre de Gravité. [cf. [§2.3.](#)]

## Jupe, transition

Pour une fusée, pièce tronconique permettant de raccorder deux éléments au corps de diamètres différents.

L'élément supérieur a le diamètre le plus petit. [cf. [§3.2.](#)]

## Maître-couple

Correspond à la surface d'une coupe transversale de la fusée, ou encore à sa projection selon son axe longitudinal (ombre portée). [cf. annexe [Aéro](#)]

## Marge Statique, MS

Distance entre le centre de gravité et le centre latéral de poussée d'une fusée. Cette distance est un des critères principaux de stabilité d'une fusée. Elle est exprimée en mètre (m) ou en calibre (nombre de diamètre). [cf. [§2.2.](#)]

## Masse Volumique, $\rho$ , densité de l'air

Rapport de la masse d'un corps sur son volume. La masse volumique est exprimée en kilogramme par mètre cube dans le système international ( $\text{kg/m}^3$ ). [cf. annexe [Aéro](#)]

La masse volumique de l'air  $\rho_h$  dépend de l'altitude  $h$  selon la relation suivante (valable jusqu'à 11000m) :

$$\rho_h = \rho_0 \cdot (20000 - h) / (20000 + h) \quad \text{avec } \rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$$

Pour des altitudes très faibles, on peut considérer que  $\rho$  est constant et vaut  $1,225 \text{ kg/m}^3$ , mais cela représente une erreur de 10% à 1000m.

## Ogive, Coiffe, Cône

Élément situé tout en haut de la fusée, et dont la forme peut varier suivant les fusées. [cf. [§3.2.](#)]

## Pas de calcul, $\Delta t$ , $dt$

Intervalle de temps élémentaire pour le calcul de trajectoire par la méthode pas-à-pas. Pendant cette période, tous les paramètres sont considérés comme constants. En particulier, le mouvement de la fusée est uniformément accéléré sur un pas de calcul. [cf. [§5.0.](#)]

## Phase balistique

Partie au vol durant laquelle la fusée n'est soumise qu'à son poids et à la résistance de l'air. [cf. [§1.1.](#)]

## Phase propulsée

Partie du vol durant laquelle le propulseur communique une force de poussée à la fusée. [cf. [§1.1.](#)]

## Portante

Composante de la résistance de l'air perpendiculaire à l'axe longitudinal de la fusée. [cf. [§1.2.](#), [§3.](#) et annexe [Aéro](#)]



## Portée

Distance entre le point de lancement d'une fusée et le point d'impact au sol en vol balistique. Pour les calculs de trajectoire, l'axe de portée est l'axe horizontal correspondant à la projection au sol de la trajectoire de l'engin.

## Produit $MS.C_{n\alpha}$ , $C_{m\alpha}$ , Coefficient du moment de correction

Il s'agit du couple créé par la force de portance ( $C_{n\alpha}$ ) associée au bras de levier entre le CdG et le Centre de Portance (Marge Statique). Cf [[§2.4.](#), [§4.1.](#) et annexe [Aéro](#)].

## Référentiel, Repère

Système de coordonnées (servant notamment à l'expression de relations physiques).

Un référentiel inertiel, ou référentiel Galiléen est un référentiel dans lequel le mouvement d'un point isolé est rectiligne uniforme. En première approximation, pour nos applications, un repère lié à la terre est un référentiel d'inertie sympathique. Par opposition, un référentiel non-inertiel est animé d'un mouvement accéléré (en translation ou rotation) par rapport à un référentiel Galiléen.

## Rétreint, transition

Pour une fusée, pièce tronconique permettant de raccorder deux éléments au corps de diamètres différents. L'élément supérieur a le diamètre le plus grand. [cf. [§3.2.](#)]

## Site de la rampe de lancement

Angle vertical donnant l'élévation de la rampe par rapport à l'horizontal. [cf. [§5.3.](#)]

## Stabilité

Caractère d'une fusée qui retrouve son équilibre initial lorsqu'elle est mise en incidence. [cf. [§2.3.](#)]

## Stabilité Statique

Notion d'analyse de la stabilité d'une fusée en s'intéressant à sa Marge Statique. Détermination de caractéristiques de la fusée à incidence nulle. [cf. [§3.](#)]

## Stabilité Dynamique

Notion d'analyse de la stabilité d'une fusée en observant la réponse à une perturbation (oscillations). Prise en compte de l'inertie en lacet/tangage, et de l'amortissement aérodynamique de la fusée. [cf. [§4.](#)]

## Surstabilité

Caractère d'une fusée dont la marge statique est très grande ou le coefficient de portance trop élevé. Les effets de compensation dus au vent relatif entraînent un vol en zig-zag et la fusée a tendance à se coucher dans le vent météorologique. [cf. [§2.3.](#)]

## **Traînée**

Composante de la résistance de l'air parallèle à l'axe longitudinal de la fusée. [cf. §1.2. et annexe [Aéro](#)]

## **Trajectoire**

La trajectoire représente le mouvement du centre de gravité de la fusée par rapport à un repère inertiel.

## **Trajectographie statique, trajecto du point matériel, trajecto du CdG**

Notion de trajectographie où l'on s'intéresse uniquement à la trajectoire dans son ensemble.

Considérant que la fusée est stable, l'incidence est toujours nulle, on assimile la fusée à un point matériel concentré en son CdG. [cf. §5. et §8.]

## **Trajectographie dynamique**

Notion de trajectographie où l'on s'intéresse aux conséquences des oscillations de la fusée sur la trajectoire.

Nécessite une modélisation tenant compte de l'attitude de la fusée, et un calcul des forces aérodynamiques en fonction de l'incidence. [cf. §7.]

## **Vent météo, vent vrai**

Vent créé par le déplacement naturel de l'air, considéré horizontal. [cf. §1.2.]

## **Vent relatif, vent apparent**

Combinaison du vent météo (ou vent propre) et du vent vitesse (ou vent vrai).

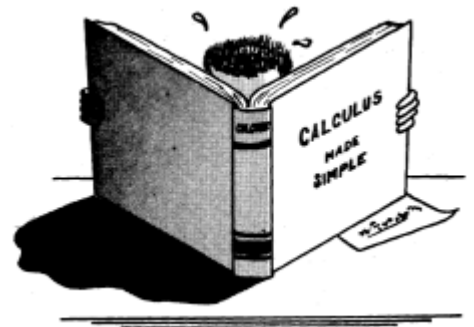
Ces deux vents se combinent pour créer un seul déplacement d'air apparent : le vent relatif (ou vent apparent). [cf. §1.2.]

## **Vent vitesse, vent propre**

Vent créé par le déplacement de la fusée dans l'air. [cf. §1.2.]

# Annexe : Recherches Bibliographiques.

- [Chapitre1- Généralités sur le vol de la fusée.](#)
- [Chapitre 2 - Notion de stabilité de la fusée.](#)
- [Chapitre 3 - Calcul de la Portance.](#)
- [Chapitre 4 - Stabilité dynamique.](#)
- [Chapitre 5 - Calcul pas à pas de la Trajectoire.](#)
- [Chapitre 6 - Méthodes d'intégration numérique.](#)
- [Chapitre 7 - Trajectographie dynamique.](#)
- [Chapitre 8 - Calcul analytique des Performances.](#)
- [Annexes.](#)
  - [Forces Aérodynamiques.](#)
  - [Masse Centrage Inertie.](#)
  - [Evolution des critères de stabilité.](#)
  - [Glossaire.](#)
  - [Recherches Bibliographiques.](#)
    - [Aérodynamique fondamentale](#)
    - [Méthode de Barrowman](#)
    - [Notions de stabilité](#)
    - [Critiques et améliorations de la méthode de Barrowman](#)
    - [Stabilité Dynamique](#)
    - [Essais en soufflerie](#)
    - [Trajectographie](#)
    - [Divers](#)



Il suffit de s'ouvrir vers l'Internet anglophone pour trouver plein de doc intéressantes. Peut-être trop, même.

## Aérodynamique fondamentale

### “Fluid-dynamic Drag” & “Fluid-dynamic Lift”

By Sighard F. Hoerner, Library of Congress 64-19666, pp 3-11, Midland Park, NJ 1965  
*Non-trouvé sur Internet !*

Livres donnant la traînée et la portance de formes élémentaires (dont éléments de révolution).

## Méthode de Barrowman

### Barrowman Report, The Theoretical Prediction of the Center of Pressure

By James S. Barrowman and Judith A. Barrowman, NARAM-8 R&D Project, 1966 August 18.  
Available at [ApogeeRockets](#).

Démontre par calculs théoriques, à partir d'équations aérodynamiques de base, les expressions des CPA,  $C_{n\alpha}$  &  $C_{m\alpha}$  des éléments de révolution et des ailerons. Equations écrites à la main.

## **The Practical Calculation of the Aerodynamic Characteristics of Slender Finned Vehicles**

By James S. Barrowman, M.S. Dissertation, The Catholic University of America, March 1967.

Démontre par calculs théoriques, à partir d'équations aérodynamiques de base, les mêmes expressions. Exprime aussi les forces et amortissement créés en cas de roulis, les interférences ailerons-tube, l'amortissement  $C_2$ , le coefficient de traînée, et comparaisons avec des essais en soufflerie.

## **Stability of a Model Rocket in Flight**

By James Barrowman, in Technical Information Report 30 (TIR-30), Centuri Engineering Co., 1970.

Notions très générales sur la stabilité (Forces, CdG, CPA, MS, surstabilité).

Conseille une Marge Statique de 1 calibre (diamètre maximum).

## **Calculating the Center of Pressure of a Model Rocket**

By James Barrowman, in Technical Information Report 33 (TIR-33), Centuri Engineering Co., 1970, (reprinted in the March '98 issue of High Power Rocketry).

Présentation de la méthode de détermination du  $C_{n\alpha}$  & CPA des éléments d'une fusée (équations de Barrowman).

Contient aussi des abaques reprenant les principales formules, puis des exemples.

Remarque : le CPA se déplace vers l'avant quand l'Angle d'Attaque augmente.

Conseille une Marge Statique de 1 calibre (diamètre maximum).

## **Rocket Stability \*\*\***

By Thomas Beach and Joyce Guzik, 1991, TR-109, buyable at [NARTS](#) (NAR Technical Reports, Intermediate Technical Reports).

Planches résumant très schématiquement et très exactement le principe de la stabilité et le calcul de Barrowman. Synthèse d'excellente qualité.

Conseille MS > 1 calibre (diamètre maximum)

## **Notions de stabilité**

### **Topics in Advanced Model Rocketry**

By G.K. Mandell, G.J. Caporaso, and W.P. Bengen, 1973, MIT Press, ISBN 0-262-63278-0.

### **Handbook of Model Rocketry**

By G. Harry Stine, John Wiley & Sons, 1983 ?, 6th edition, ISBN 0-471-59361-3.

# Critiques et améliorations de la méthode de Barrowman

## What is Static Margin

Apogee Newsletter #133, 2004 October 11, available at [ApogeeRockets](#).

Dans le cas de fusées avec jupes et/ou rétreints, ou dans le cas de fusée particulièrement courte ou longue, attention au choix du calibre de référence.

Conséquence sur la valeur de la Marge Statique bêtement calculée, interprétation intelligente nécessaire.

## Wind Instability, What Barrowman Left Out \*

By Robert Galejs, [@ll.mit.edu](mailto:@ll.mit.edu), 1999, available at [sentinel39-galejs.pdf](#) or [Apogee](#).

Ajoute aux équations de Barrowman une portance des éléments de révolution (tube cylindrique notamment) dépendante du carré de l'incidence.

A une incidence de 20°, le CPA avance de 1 calibre pour une fusée moyenne, 0.5 calibre pour une fusée courte, et 10 calibres pour une fusée longue. Connaissant cela, il est possible d'adapter la marge statique nécessaire et de réduire la 'marge' de sécurité.

## Extending The Barrowman Method For Large Angle Of Attack

By Edward V. LaBudde, R&D Project, NARcon, March 1999, available at [ApogeeRockets](#).

Méthode théorique pour mettre bout à bout les méthodes Barrowman (0°) et CutOut (90°).

Considère notamment le décrochage des ailerons et la portance des tubes cylindriques.

En déduit un angle d'instabilité dynamique, par déplacement du CPA en incidence, ...

Ne pas confondre avec d'autres méthodes dites 'extended Barrowman' !

## What is $CN_{\alpha}$ , RockSim Method

Apogee Newsletter #74, 2002 February 8, available at [ApogeeRockets](#).

1) What is  $CN_{\alpha}$  : D'après AeroCFD (soft par élément-finis), le  $Cn_{\alpha}$  n'est pas si constant que ça !

2) RockSim Method : Enoncé des différences avec la méthode initiale de Barrowman :

- calcul intégral du CPA des ailerons de formes quelconques
- correction de la portance du tube en présence d'ailerons (via la portance des ailerons !)
- ailerons possibles au niveau des transitions (jupes, rétreints)

## Numeric Methods in Model Rocket Design, RockSim Method equations

Calculating the CG and CP of Odd Rocket Configurations - "The RockSim Method"

By Paul L. Fossey, 1998, R&D report at NARAM-40, Apogee Tech Publication #17, buyable at [ApogeeRockets](#).

Calcul du CdG, du CPA et  $Cn_{\alpha}$  d'ogives et d'ailerons de forme quelconque.

## Lift and Center of Pressure of Wing-Body-Tail combinations

By William C. Pitts, Jack N. Nielsen and George E. Kaattari, NACA, 1953, available at [ApogeeRockets](#) ?

Article technique, traitant notamment de l'**interaction aileron-corps** et de l'**interaction inter-empennage** (i.e. interférence des canards sur les ailerons, ou masquage inter-ailerons).

## Stabilité Dynamique

### Fundamentals of Dynamic Stability

By Gordon K. Mandell, TR-201, buyable at [NARTS](#) (NAR Technical Reports, Advanced Technical Reports).  
(or 6-part series in Model Rocketry, The Journal of Miniature Astronautics, October 1968 to April 1969)

Article très long et théorique sur la stabilité dynamique (I, C1, C2, amortissement ...).

Conseille  $1 < MS < 2$  &  $0.05 < \text{amort} < 0.30$

### Basics of Dynamic Flight Analysis

Tim Van Milligan, sept. to dec. 2007, in Apogee [Newsletter](#) #192 to #198

Vulgarisation de l'article de Mandell, et utilisation de RockSim pour obtenir les paramètres de stab dynamique.

Part 1 - Moment-of-Inertia (I)

Part 2 - The Corrective Moment Coefficient (C1)

Part 3 - The Damping Moment Coefficient (C2)

Part 4 - Radial Moment of Inertia and Natural Frequency ( $\omega_0$ )

Part 5 - The Damping Coefficient ( $\zeta$ )

Part 6 - The 12-Steps Program

### Dynamic Stability Criteria for Model Rockets

By Michael Micci, article from NAR Tech Review - Vol. 4, 1979, buyable at [NARTS](#) (Publications, NAR Publications).

Inertie transverse, coef d'amortissement, vols expérimentaux.

Critère de stabilité : Marge Statique minimum en fonction de l'Inertie.

Résultats contestés par Edward V. LaBudde dans "A Design Procedure for Maximizing Altitude Performance", car M. Micci ne prendrait pas en considération la translation du CdG.

### A Design Procedure for Maximizing Altitude Performance, interpreting dynamic stability

By Edward V. LaBudde, R&D Project, NARAM 1999.

Réflexion générale sur la notion de stabilité dynamique, interprétation physique.

Estimation de l'effet du vent et des mésalignements de la poussée et des ailerons sur l'altitude maximum.

Optimisation de la longueur et de l'orientation de la rampe.

Elaboration d'un simulateur à 2 DDL.

Stabilité dynamique avec translation du CdG et amortissement associé (C1 C2 C3).

Calculs analytiques de performance (altitude).

Recommande une marge statique faible, mais telle que l'incidence ne dépasse pas 15 à 20° avec les conditions de lancement.

## Static and Dynamic Stability Considerations \*\*\*

Summary & §6. of Launching Safely in the 21<sup>st</sup> Century, final report of the Special Committee on Range Operation and Procedure, to the National Association of Rocketry (NAR), 2005 October 29, [launchsafe.pdf](#).

Très bonne synthèse de la situation actuelle.

Traduction d'extraits :

- Au niveau sécurité, 75% des vols potentiellement dangereux sont dûs à un mauvais fonctionnement du système de récupération, 20% à une instabilité en phase propulsée.  
Il faut absolument améliorer la fiabilité des systèmes de récupération.
- La fusée doit être guidée par une rampe de longueur suffisante, et la fusée doit avoir une accélération initiale suffisante (Poussée/Poids > 5 soit accél > 4g), c'est à dire que :  
la **vitesse en sortie de rampe** doit être supérieure à 4 fois la vitesse du vent, ce qui assure un angle d'attaque inférieur à 14°.  
La rampe (tige, rail ou tour) doit être suffisamment rigide. Placement des patins sur la fusée incluant CPA et CdG.
- A 15° d'incidence, le CPA est généralement de 0.75 à 1.25 diamètres au dessus du CPA calculé par Barrowman (de 1 à 1.5 D @ 20°).  
On prendra donc une **marge statique minimum** adéquate de l'angle d'incidence en sortie de rampe (qui dépend du vent).
- Une **marge statique maximum** de 4 diamètres (calculé par Barrowman) évitera que la fusée s'aligne trop rapidement avec le vent.
- Pour réduire le nombre de vols instables, les clubs et les équipes opérationnelles doivent augmenter leur connaissance sur le compromis entre la marge de stabilité statique et la stabilité dynamique. Les ressources sont disponibles, mais pas assez utilisées.
- Considérant la stabilité dynamique de la fusée comme un oscillateur harmonique amorti (rotation autour du CdG), on définit les coefficients de couple C1 & C2, et d'amortissement  $\zeta$ . Le temps de réponse à une perturbation est minimum pour  $\zeta=0.7$ , mais un **amortissement** supérieur à 0.3 diminue les performances de la fusée par augmentation de la traînée.

## Essais en soufflerie

### Essais Aérodynamiques ONERA

Note Technique ANSTJ n°20, essais de novembre 1975, disponible sur [Planete Sciences Espace](#).

Extraits du document : Pour chacune des configurations (3 types d'empennage, 2 finesses), il s'agissait d'étudier la stabilité longitudinale en fonction de l'incidence et du nombre de Mach (mesure de la portance et du coefficient du moment de tangage) ainsi qu'une estimation du coefficient de traînée. (...)

Le programme des essais a été établi dans le but de dégager les caractéristiques de stabilité statique longitudinale des engins. A la suite de cette série d'essais, on a pu trouver trois sortes de courbe : le coefficient de force axiale (traînée) en fonction du nombre de Mach, la position du foyer aérodynamique en fonction du nombre de Mach, la position du foyer aérodynamique en fonction de l'envergure de l'empennage de l'engin.

### Comparison of Barrowman Stability Analysis with Wind Tunnel Data

By Tom McAtee, R&D project NARAM-40, 1998, available at [ApogeeRockets](#).

Comparaison pour 2 fusées entre des données soufflerie NASA et équations Barrowman, correspondance à Mach 0.6.

## Wind-Caused Instability

By Bob Dahlquist, March 1998, updated article available in html at [ApogeeRockets](#).

Essais de 4 fusées dans la soufflerie de l'auteur, montrant que le CPA se déplace linéairement vers l'avant de ~1 calibre à 15° d'incidence.

Calcul de l'incidence en sortie de rampe (vitesse ou accélération min, rampe min).

Recommande  $MS > 1$ , voire + les jours de grand vent.

## Trajectographie

### A New Technique For Integrating The Motion Equation For Rocket Altitude Simulation

Viggiano, J. A. S., MARSCON 1993, in NAR Tech Review - Vol. 8, buyable at [NARTS](#).

(non acheté, 12\$)

### Numerical Methods for Model Rocket Altitude Simulation

A comparative Study of Accuracy and Efficiency, By: Keneth J. Karbon. R&D Report from NARAM-40, 1998

## Divers

### Design of Aerodynamically Stabilized Free Rockets \*\*

US Army Missile Command Military Handbook, MIL-HDBK-762(MI), July 1968, Approved for public release in 1990.

§5.Aerodynamics : Etat de l'art de l'aérodynamique des fusées à ailerons.

page 249 :  $C_{n\alpha}$  ogive =  $2*(k_2-k_1)$  apparent mass factor as derived by Munk avec  $(k_2-k_1) \sim 0.95$  à  $0.98$  pour des finesses de 10 à 20 calibres respectivement

figure page 323 : A Mach 0.8, une ogive tangente 4-calibres + fuselage 4 à 11 calibres respectivement a un  $C_{n\alpha}$  de 2.3 à 2.6 rad-1, un  $X_{cp}$  de 2.4 à 3.8 D

figure page 339 : A Mach 0.2 à 0.7 (respectivement), une ogive tangente 3-calibres + fuselage 16 calibres a un  $C_{n\alpha}$  de 3.3 à 2.7 rad-1, un  $X_{cp}$  de 4.5 à 4.5 D

figure page 339 : A Mach 0.2 à 0.7 (respectivement), une ogive tangente 3-calibres + fuselage 21 calibres a un  $C_{n\alpha}$  de 3.6 à 3.0 rad-1, un  $X_{cp}$  de 8.1 à 6.3 D

page 250 : les coefs aéro sont donnés avec une précision de +/-10% sur le  $C_{n\alpha}$  & +/-0.5calibre (ou +/-10%) sur le  $X_{cp}$ .

page 250 :  $X_{r\acute{e}treint}$  relatif = 0.6 ; rétreint  $< 8^\circ$  (sinon décrochage)

page 253 :  $C_{n\alpha}$  ailerons = fct(AspectRatio) (formule effacée = formule Barrowman repport n°49 avec  $A=A_f$ )

figure page 342 :  $C_{n\alpha}$  ailerons = abaque

page 253 :  $X_{cp}$  ailerons = at 25% of the mean aerodynamic chord measured rearward from the leading edge.

page 255 :  $X_{cp}$  jupe + précis (formule)

figure page 363 :  $C_{n\alpha}$  jupe + précis

page 266 §5.3.5 / figures pages 397 402 & 404 : "plume effects" en transonique (influence du jet de poussée sur les pressions au niveau des ailerons)

figure page 408 : Aerodynamique non-linéaire,  $C_n \neq C_{n\alpha} \cdot \alpha$  en subsonique

page 279 §5.4 : dynamic stability. il est conseillé d'avoir du roulis, pour compenser les défauts type mésalignement ; formule amortissement  $C_m(\alpha_{\dot{}}) = -2 \cdot \sum (C_{n\alpha} \cdot l^2 / d^2)$

page 281 §5.5 : traînée, formes d'ogives